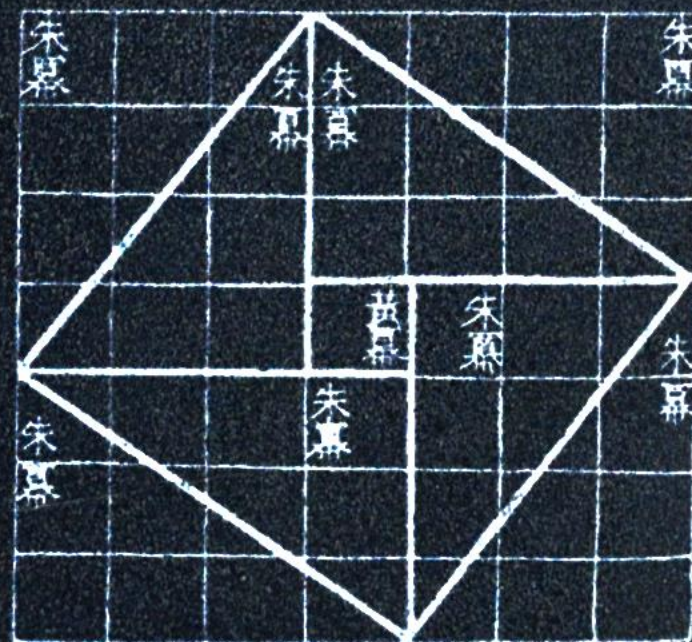
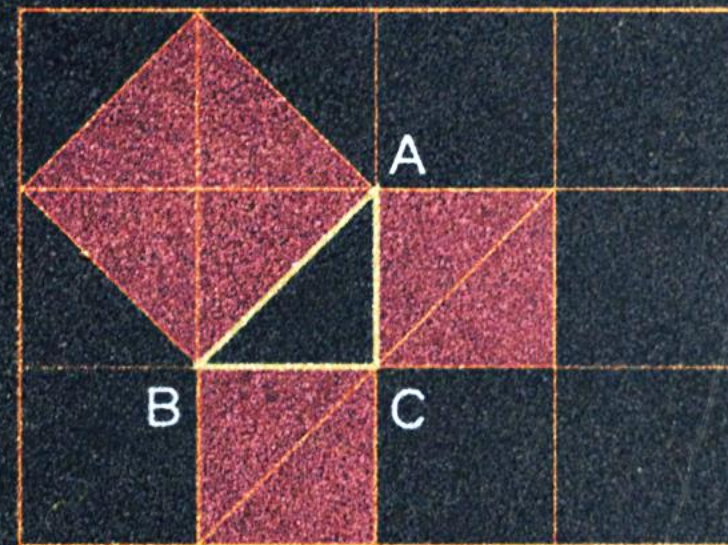


通識博雅課程 -
數學的故事

單元 4

畢氏定理的故事—
畢達哥拉斯的故事

中國科技大學 徐惠莉



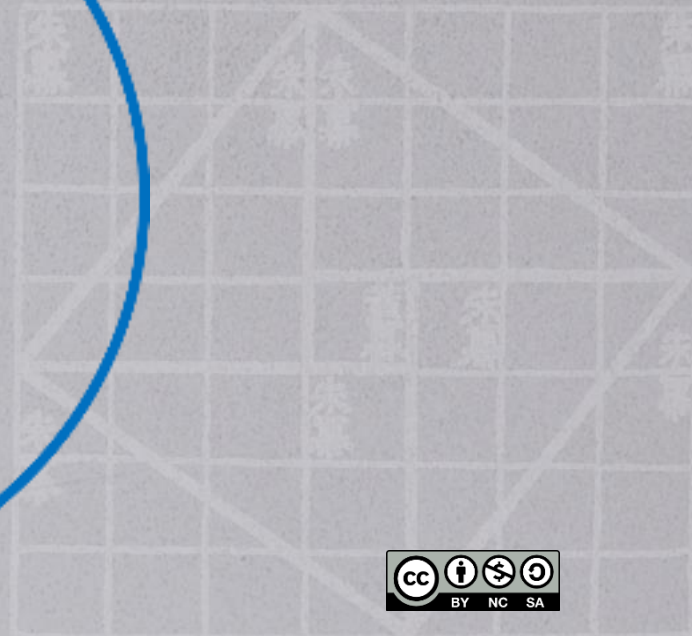
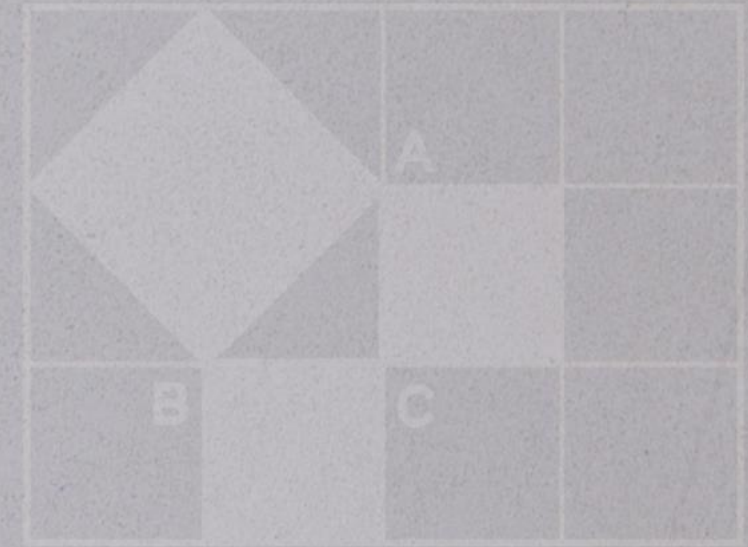
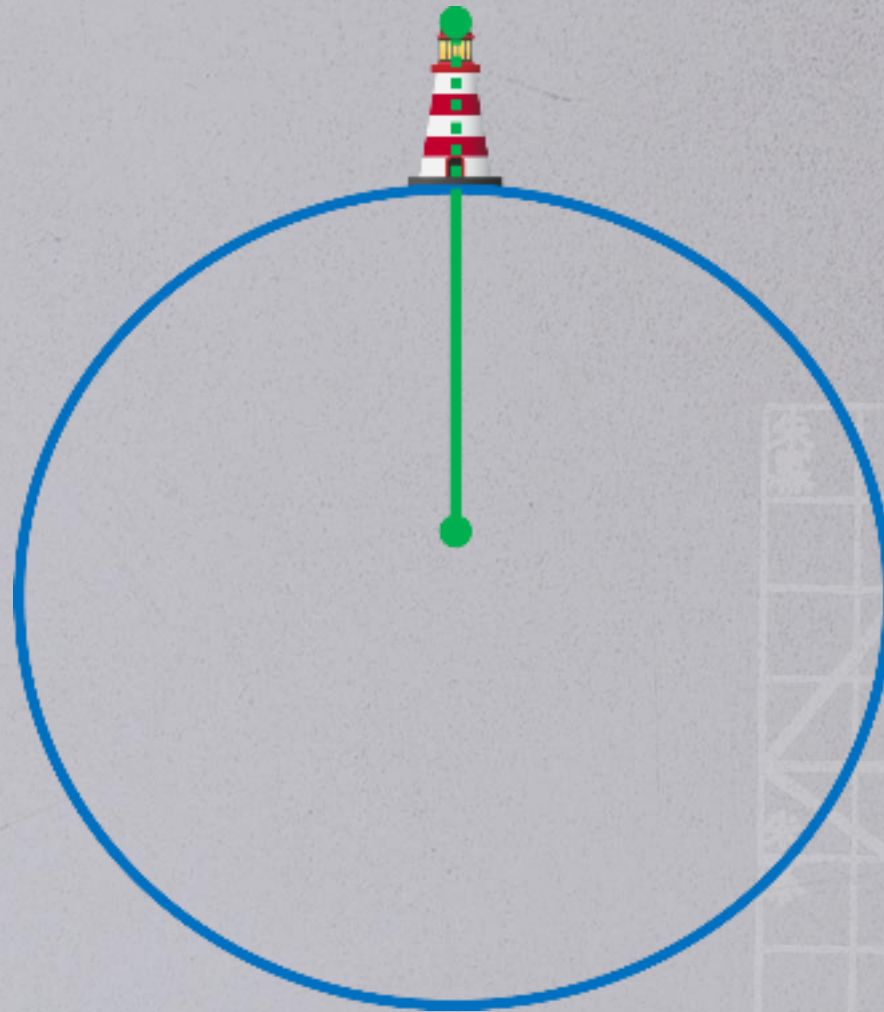
燈塔任務



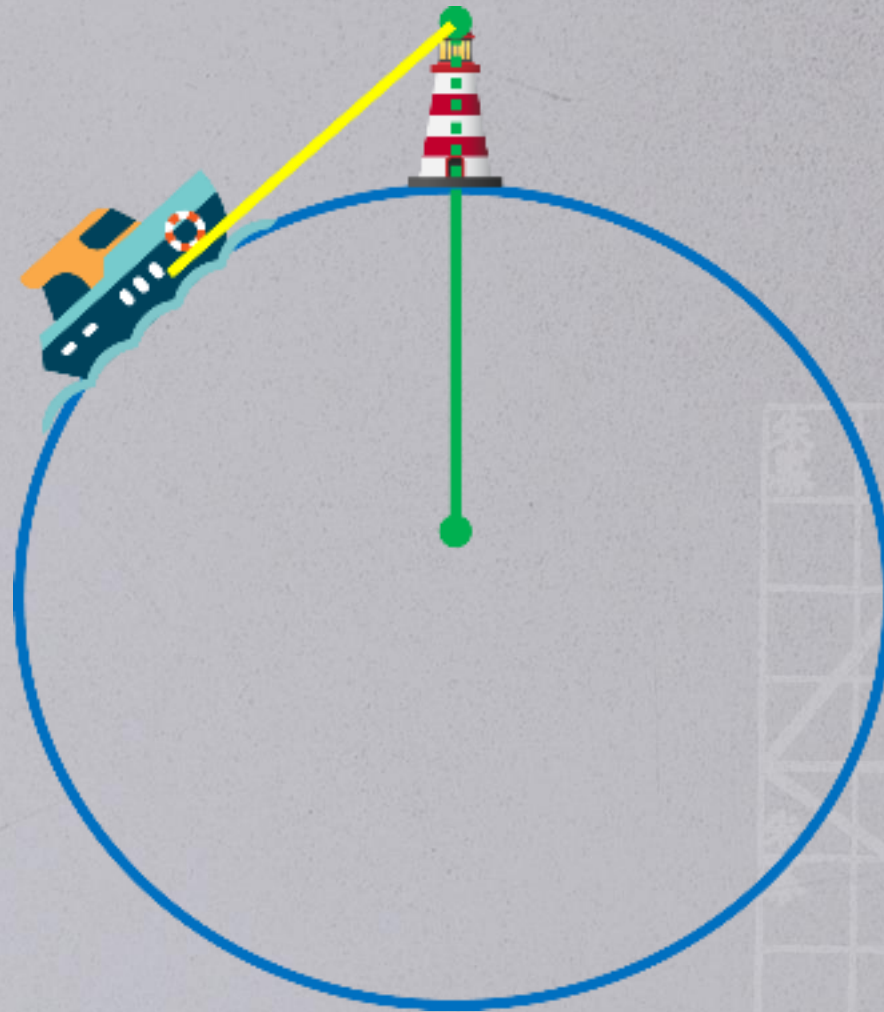
燈塔任務

- 在某海岸城市的海灣上建造了一座燈塔，此燈塔高達30.7公尺。它的信號燈將能警告這些正靠近岸邊的船隻。
- 試估計當某船隻第一次看見燈塔給的信號燈時，此船離燈塔有多遠？
- 解決上述的任務時，你要考量哪些重要的資訊、條件或線索？

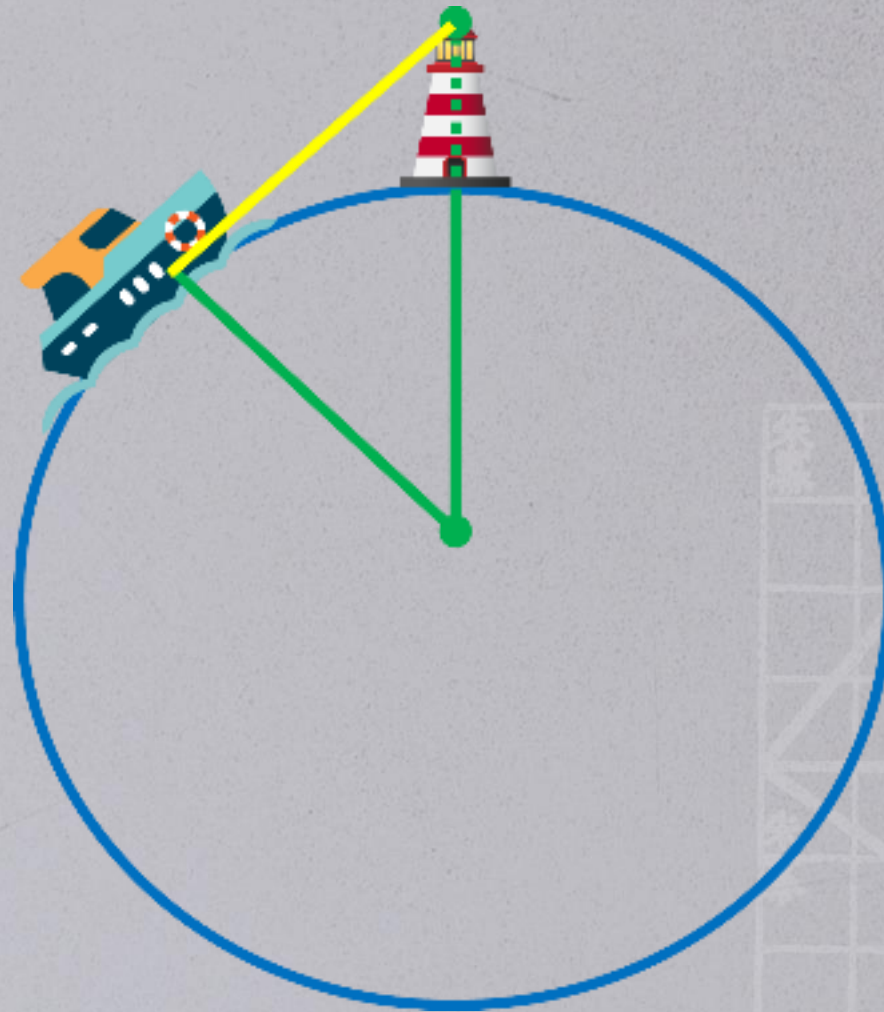
提示1. 地球是圓的



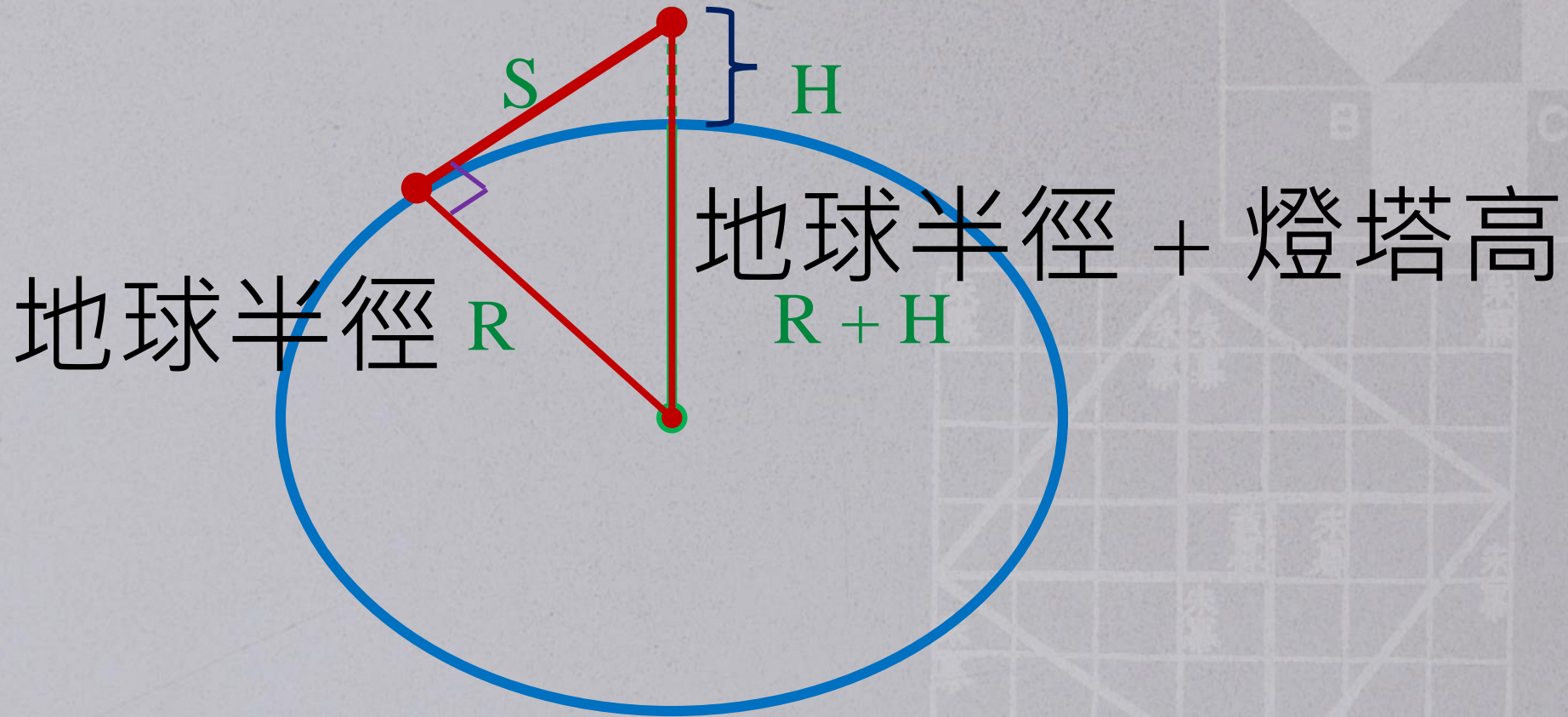
提示2. 光是直線進行的



提示3. 這裡有一個直角三角形

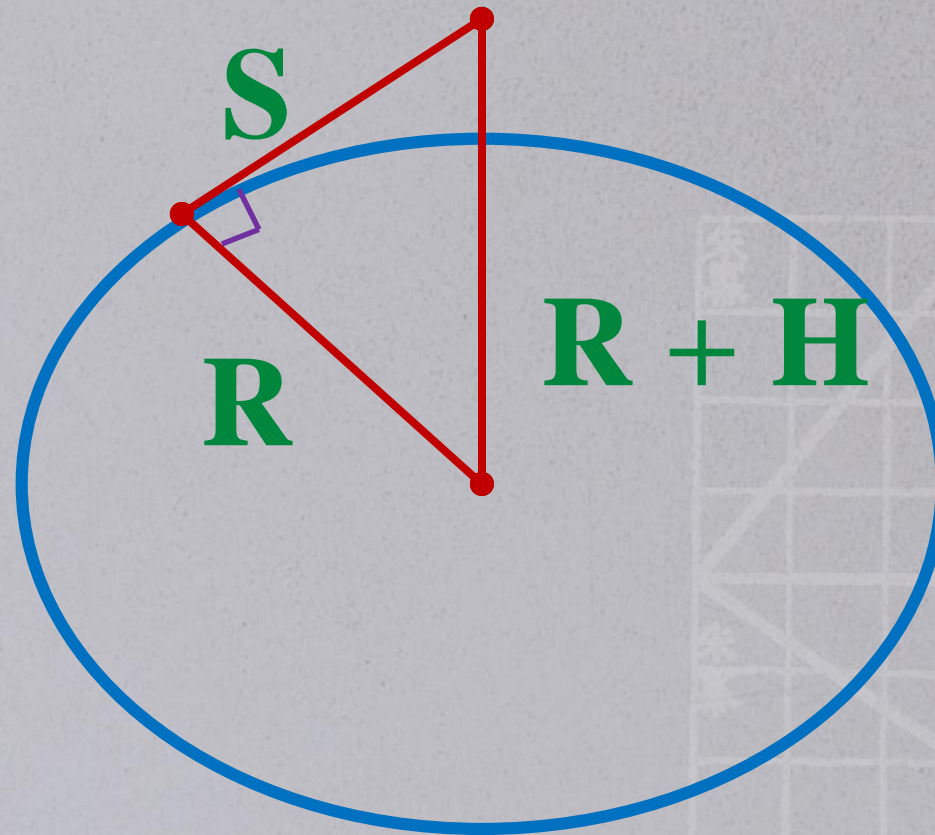


船離燈塔的距離



還記得這組公式嗎？

$$S^2 + R^2 = (R + H)^2$$



畢氏定理

Pythagorean theorem

- 任意給定一個直角三角形，夾直角的兩邊分別為 a, b ，直角的對邊長為 c ，則三邊長的關係為

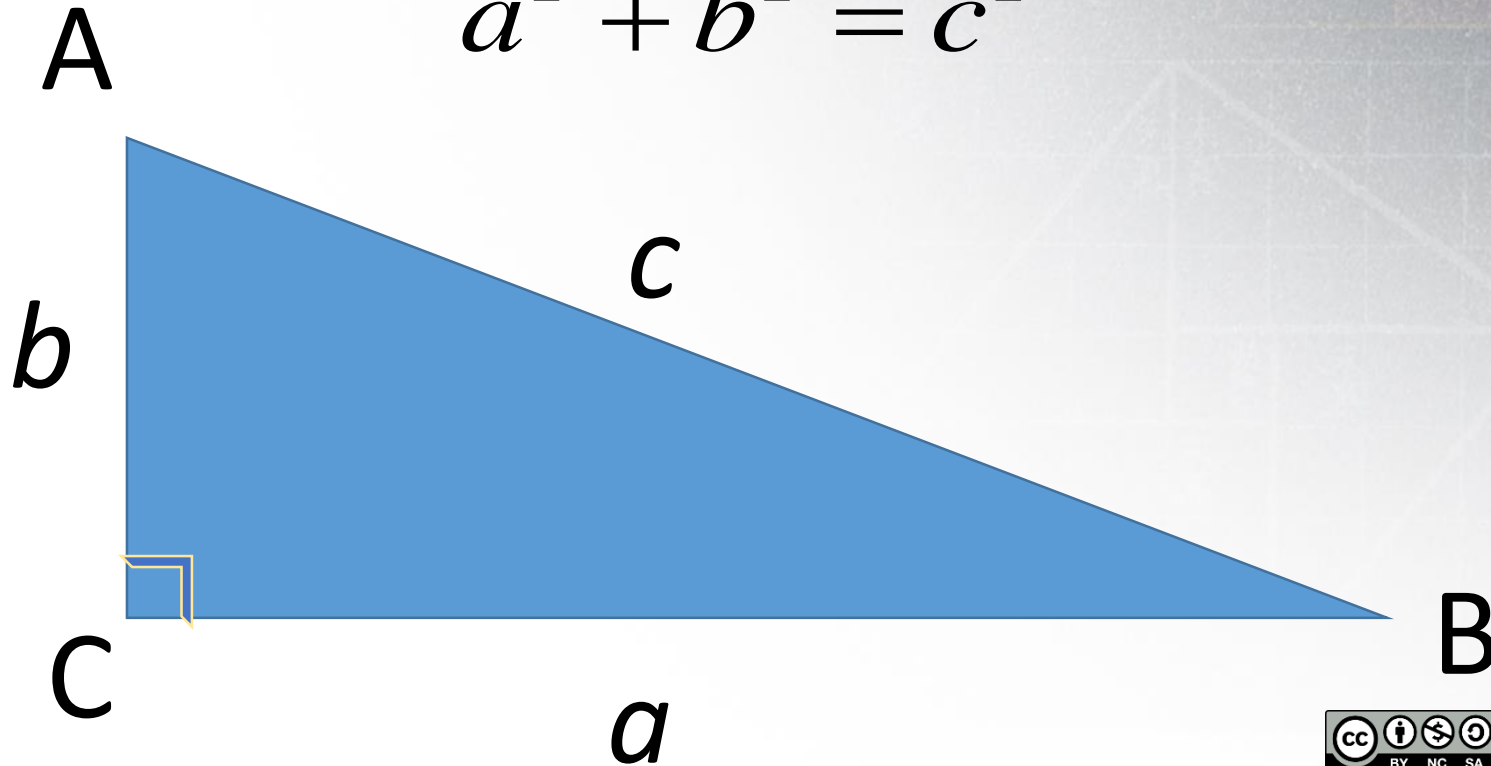
$$a^2 + b^2 = c^2$$

- 如果一個三角形三邊 a, b, c 有 $a^2 + b^2 = c^2$
則這個三角形是直角三角形

畢氏定理

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



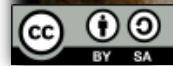
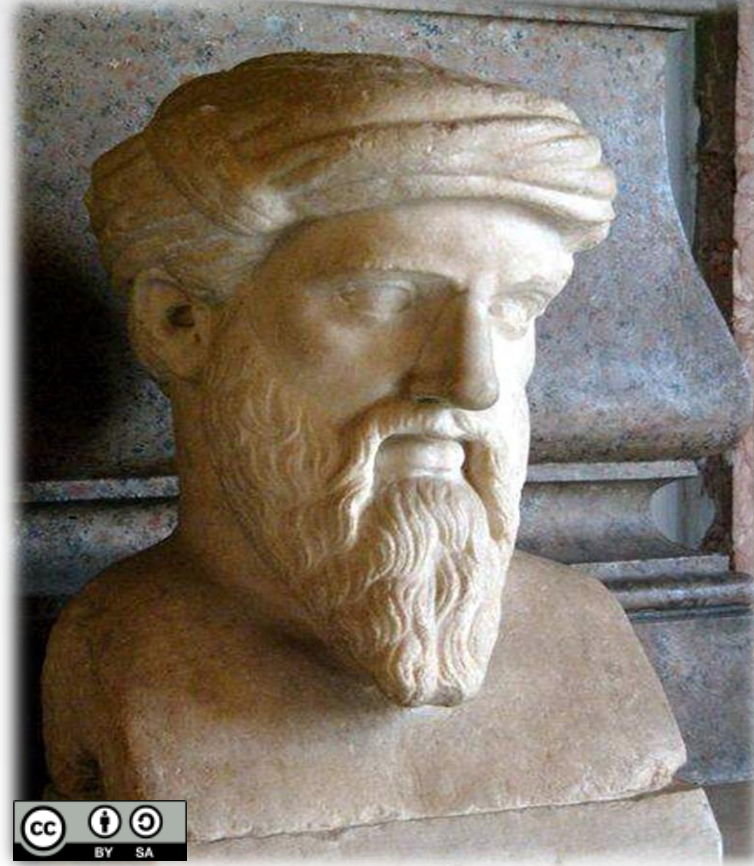
畢氏定理的由來

- 傳統上認為是由古希臘的畢達哥拉斯（約公元前560年~公元前480年）所證明。歷史上其實並無確實的記載。
- 在希臘最早而嚴格的證明是在歐幾里得（Euclid，約公元前330-275年）所編寫的《幾何原本》（Elements）中。
- 據說畢達哥拉斯證明了這個定理後，即斬了百頭牛作慶祝，因此又稱「百牛定理」。

畢達哥拉斯

Pythagoras (約-569 ~ ?)

- 古希臘哲學家、數學家 and 音樂理論家。
- 數學可以解釋世界上的一切事物，對數字癡迷到幾近崇拜。
 - 由於他「萬物皆數」的信念，為希臘數學的昌盛奠下基本的思想質素。



音樂理論家-畢達哥拉斯

畢氏經過一家打鐵舖時，聽到和諧的打鐵節奏。

- 鐵錘的重量比 12:9:8:6
 - $12:6 = 2:1$
 - $12:8 = 3:2$
 - $12:9 = 4:3$
- 1、2、3、4 構成畢氏的基本音程
- 萬物皆數



數字也瘋狂

- 奇數
 - 男性
 - 光明、善
- **1** 是「生成元」，不能視為數字。
- **3** 是有開始、中間、結尾。
- **5** 是愛情與婚姻。
 - $5 = 2 + 3$
- 偶數
 - 女性
 - 黑暗、惡
- **2** 意見及分裂之數。
- **4** 正義及秩序
- **6** 是完全數也是創世之數。
 - $6 = 1 + 2 + 3$
 - $6 = 2 \times 3$

雅典學院中的



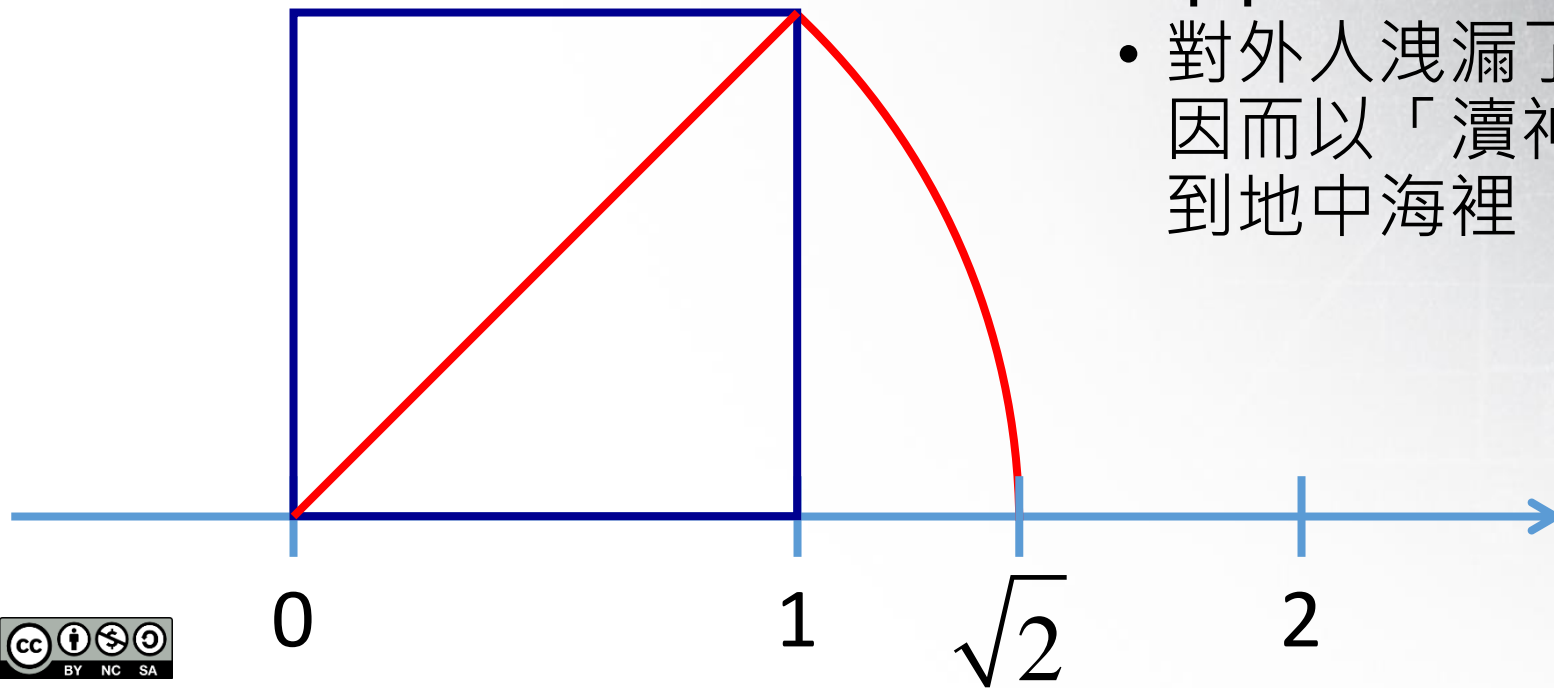
畢達哥拉斯學派

- 入會者必須宣誓，不會將學派的秘密以及較高深的學問外流出去，同時也必須經過嚴格的訓練，才會被承認為正式的教徒。
- 相信數形與宇宙真理本質合而為一的宗教團體，最為世人所樂道的是……
 - 數學發展
 - 把數學應用在秩序此一觀念上所扮演的角色
 - 音樂、宇宙、倫理

第一次數學危機：無理數的發現

■ 因信仰而死的希帕索斯 (Hippasus)

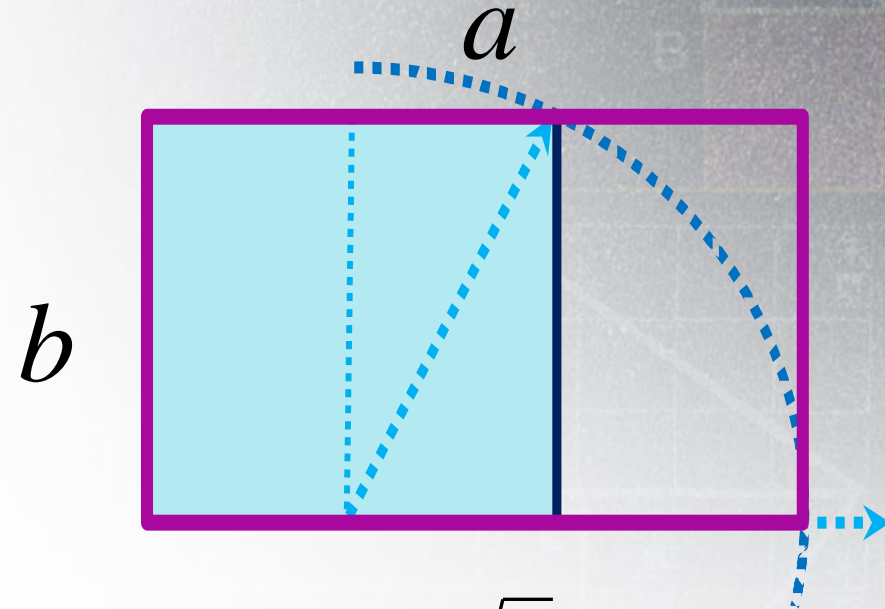
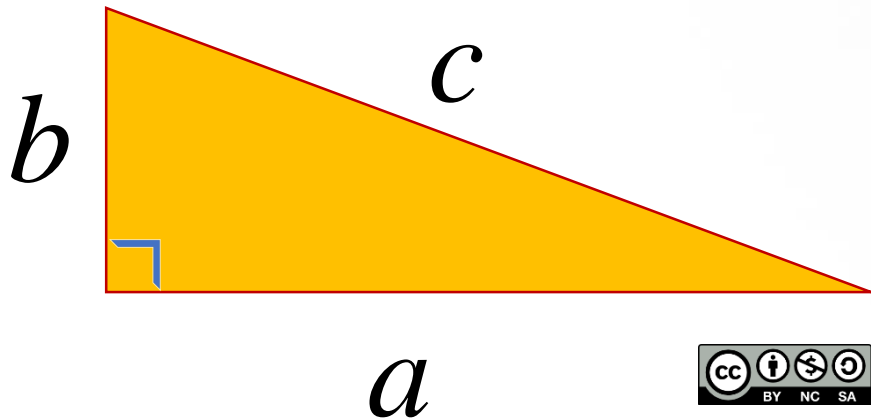
- 對外人洩漏了無理數秘密，因而以「瀆神」的罪名被扔到地中海裡



「畢氏定理與黃金分割是幾何學的兩大寶藏！」

克卜勒

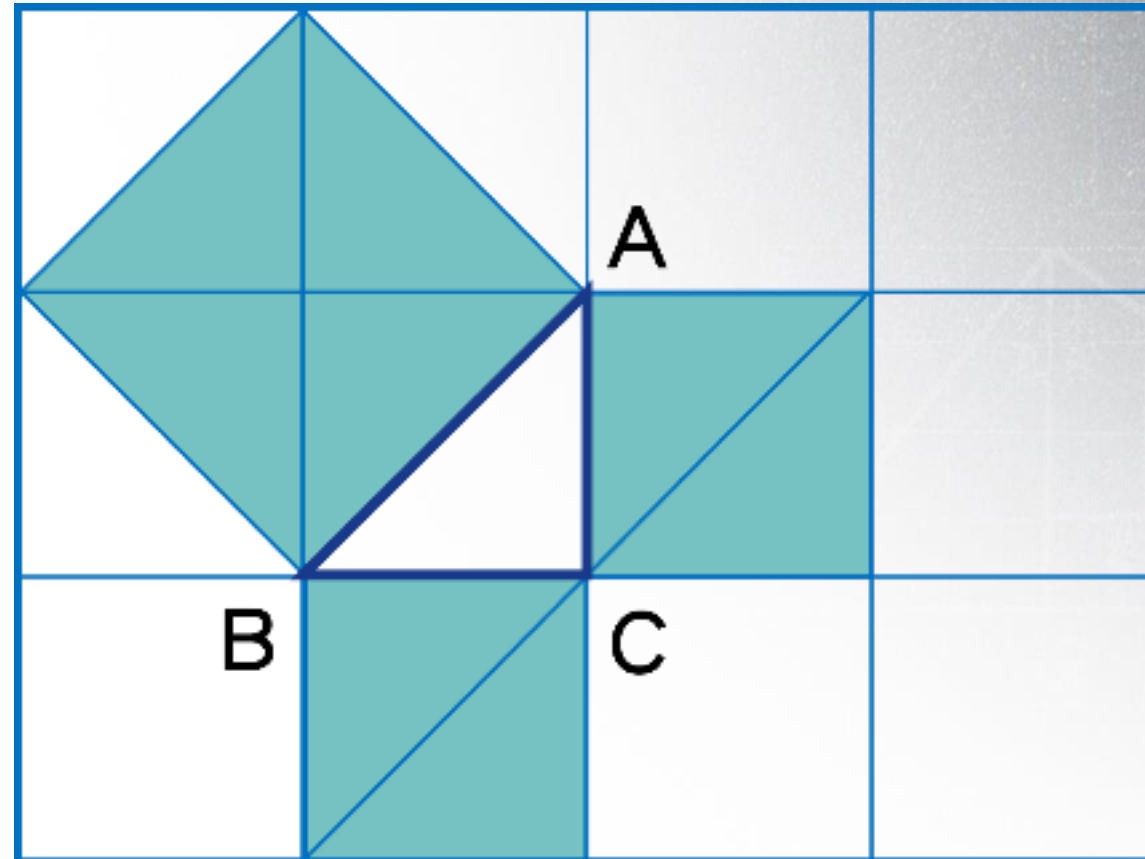
$$a^2 + b^2 = c^2$$



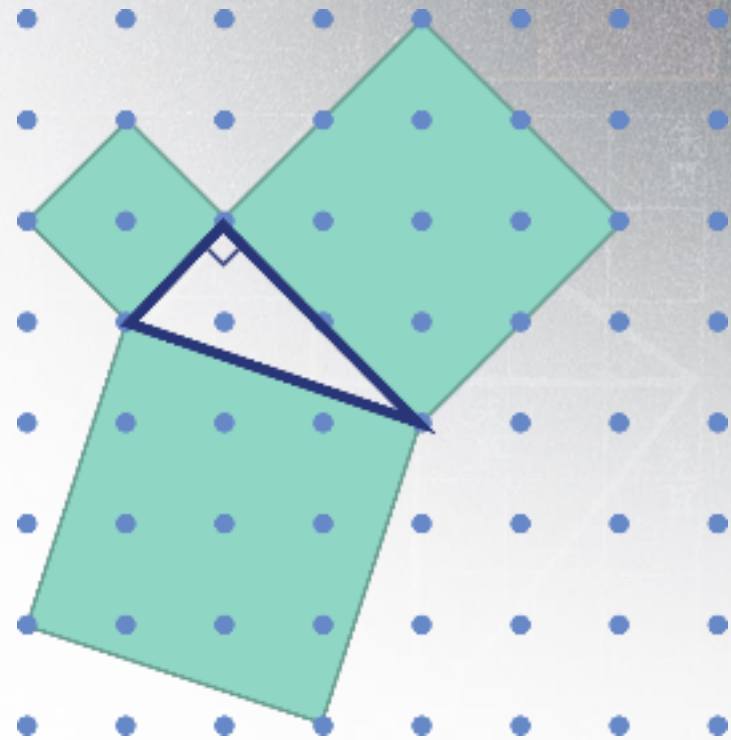
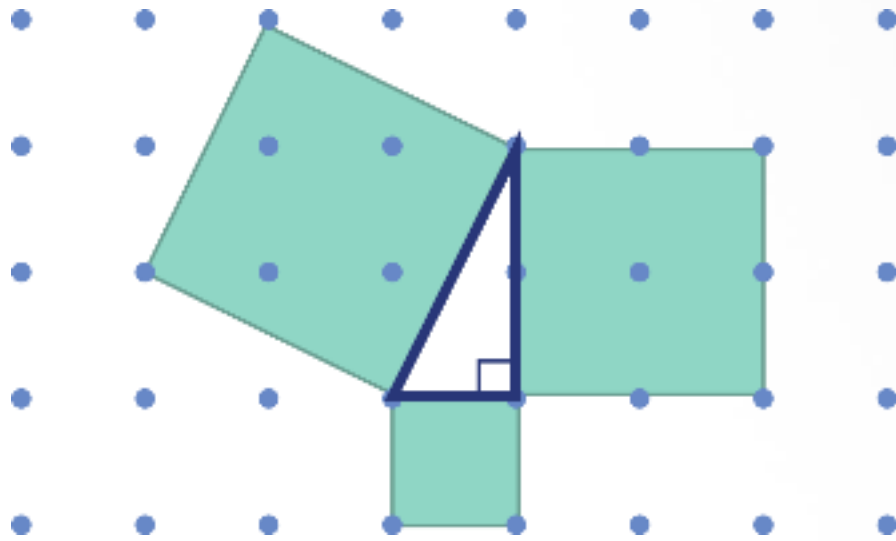
$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$



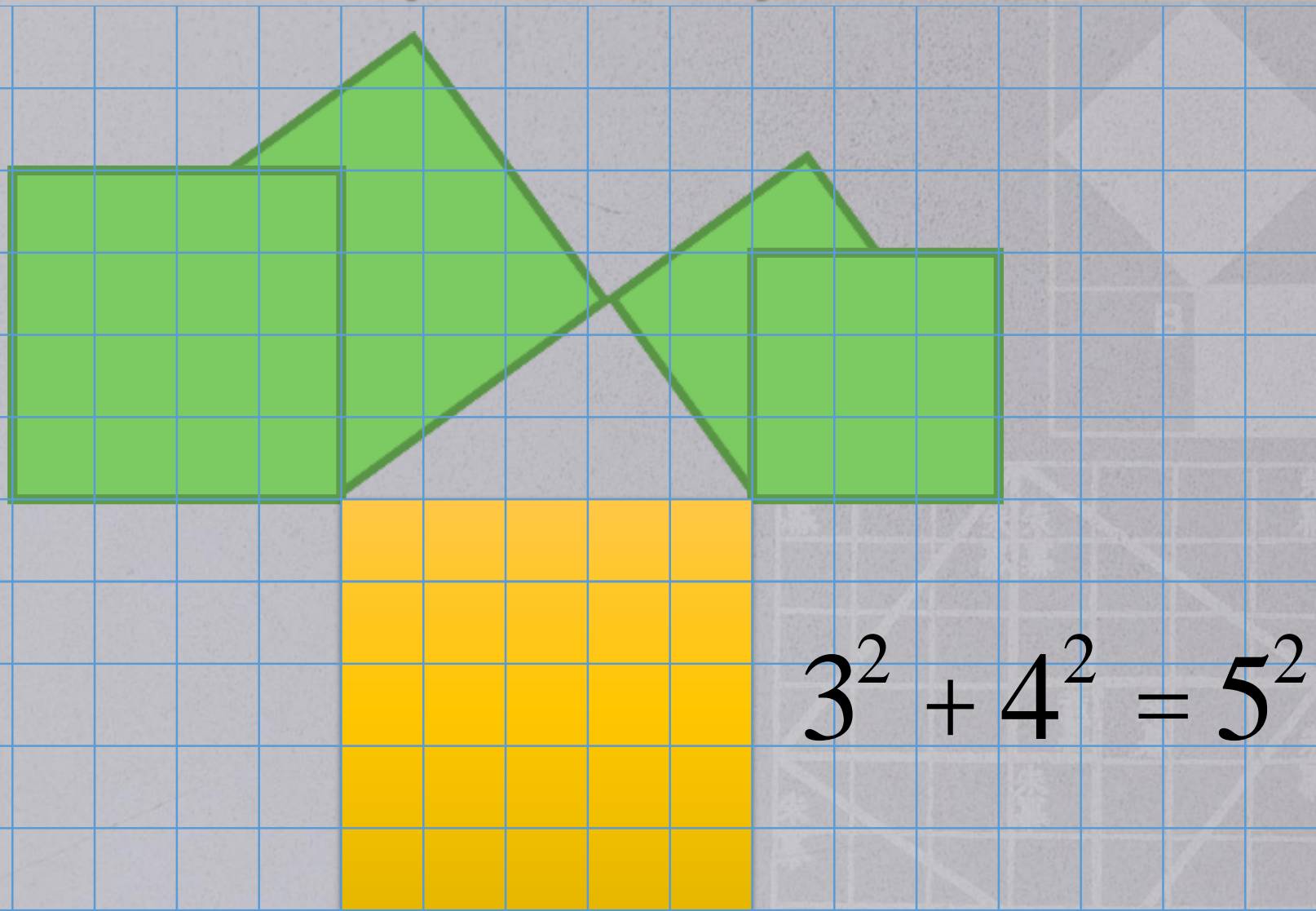
古埃及人的鋪磚



利用幾何板 (geoboard) 發現畢氏定理的特例



發現畢氏三元素 (勾股數)



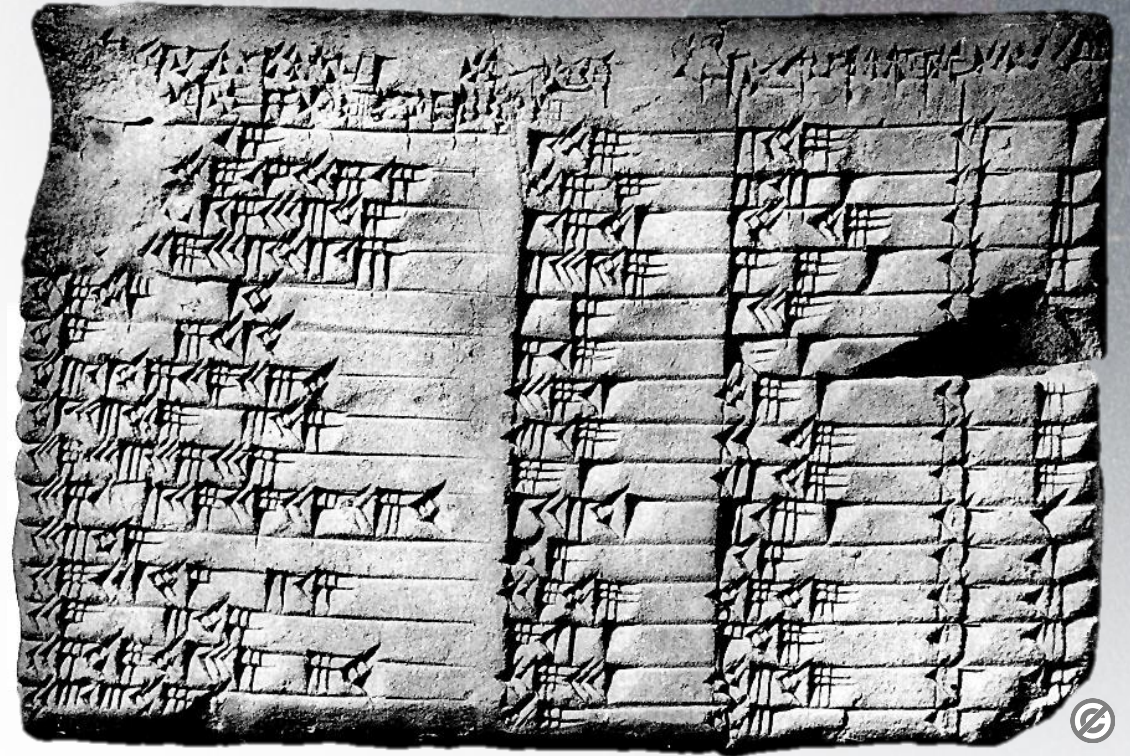
畢氏三元素

- 能符合畢氏定理 $a^2 + b^2 = c^2$ 之中， (a, b, c) 的正整數解。
 - n 是正整數，則 (na, nb, nc) 也會是畢氏三元素。
 - 如果 (a, b, c) 三者互質，則 (a, b, c) 稱為是素畢氏三元素。

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37

畢氏三元素又稱為勾股數

- 埃及的紙草書記載
(3, 4, 5)這組勾股數
- 巴比倫泥板中出現最大的一個勾股數是
(18541 , 12709 , 13500)



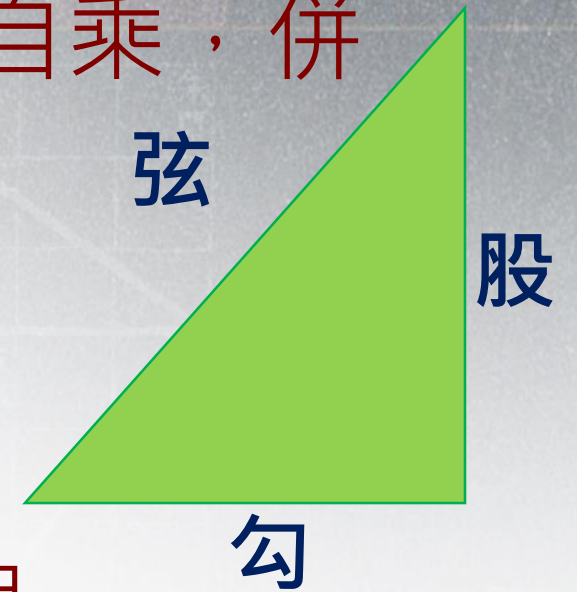
公元前18世紀記錄各種勾股數組的巴比倫石板

畢氏定理又稱「商高定理」

- 《周髀算經》的趙君卿注記載。
- 周公問商高(西周時大夫，約公元前1100年)：「天不可階而升，地不可將尺寸而度。」商高：「數之法，出於圓方。圓出於方，方出於矩。矩出於九九八十一。故折矩，以為句廣三，股脩四，徑隅五。既方之外，半其一矩。環而共盤，得成三、四、五。兩矩共長二十有五，是謂積矩。」
- 商高認為早在禹治水時即利用了這個性質。

畢氏定理又稱「陳子定理」、「勾股定理」

- 有關「商高定理」的最早記載出現在《周髀算經》中關於陳子的敘述。
- 對於立竿測影的問題，陳子：「**勾股各自乘，併而開方得弦。**」
- 因為不知到底是由誰最先發現此定理，建議避開人名，直接以「勾股弦定理」稱之
 - 而有勾股必有弦，故亦稱為「**勾股定理**」。



關於畢氏定理證明

- 畢達哥拉斯是否有提出畢氏定理的證明？
 - 沒有任何的歷史文獻，記錄下畢達哥拉斯的證法
- (西) 畢氏定理的書面證明最早見於幾何原本第一冊的第47個命題
- (東) 中國東漢末年吳國的趙君卿最早給出畢氏定理的證明

畢氏定理日

- 由日、月、年（最後兩位數），組成畢氏三元素。
 - 譬如 03/04/05 (2005年4月3日)
 - 13/05/12 (2012年5月13日)
- 最近錯過的畢氏定理日
15/8/17 (2017年8月15日)
- 接下來迎接的畢氏定理日
16/12/20 (2020年12月16日)

畢氏定理的故事

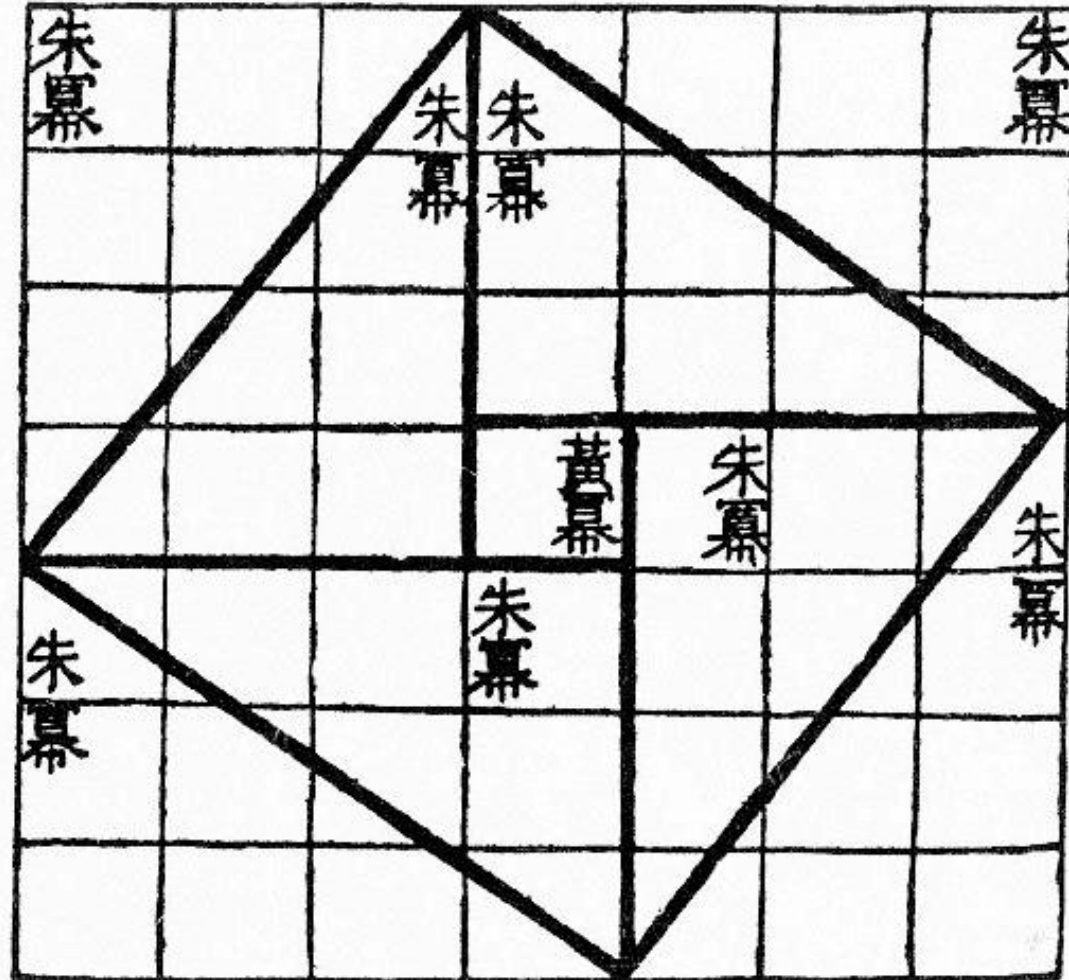
與面積相關的證明方法

有多少種證明畢氏定理的方法？

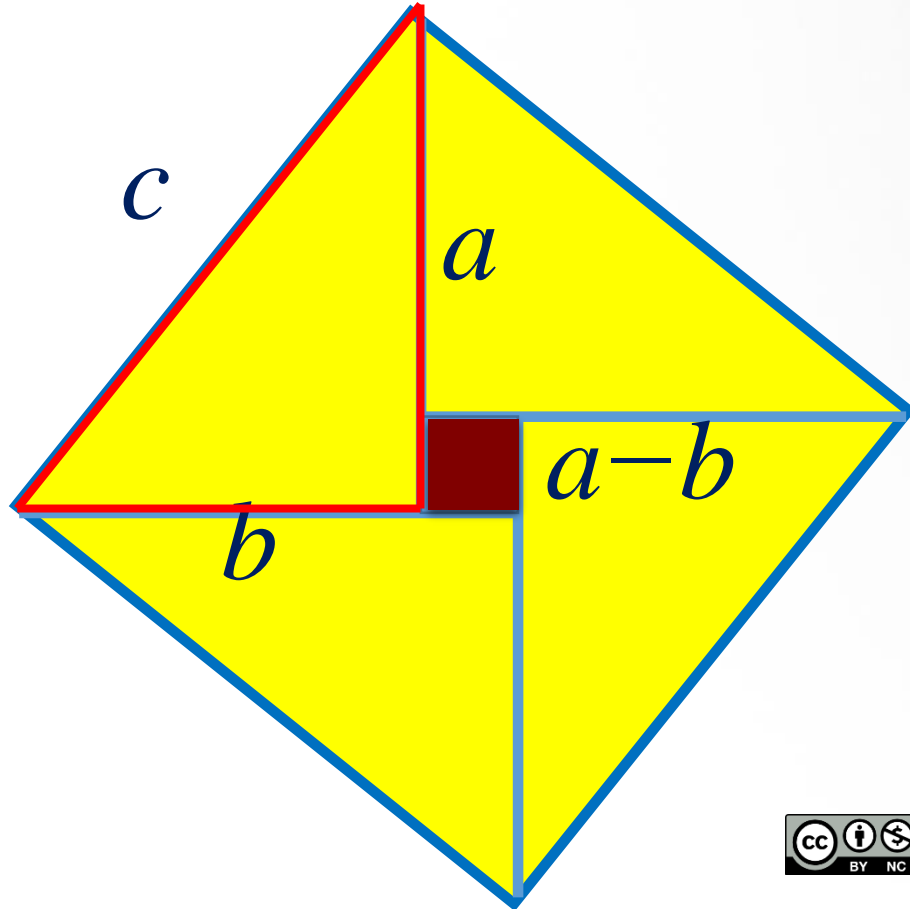
從古至今，世界各國的數學家(或是熱愛數學的人們)從不同角度來探討或證明，其證明方法約有**四百多種**，是最多證明的數學定理。

東漢數學家趙君卿 證明「商高定理」

句股幂合以成弦幂



勾股各自乘，並之，為弦實，開方除之，即弦。



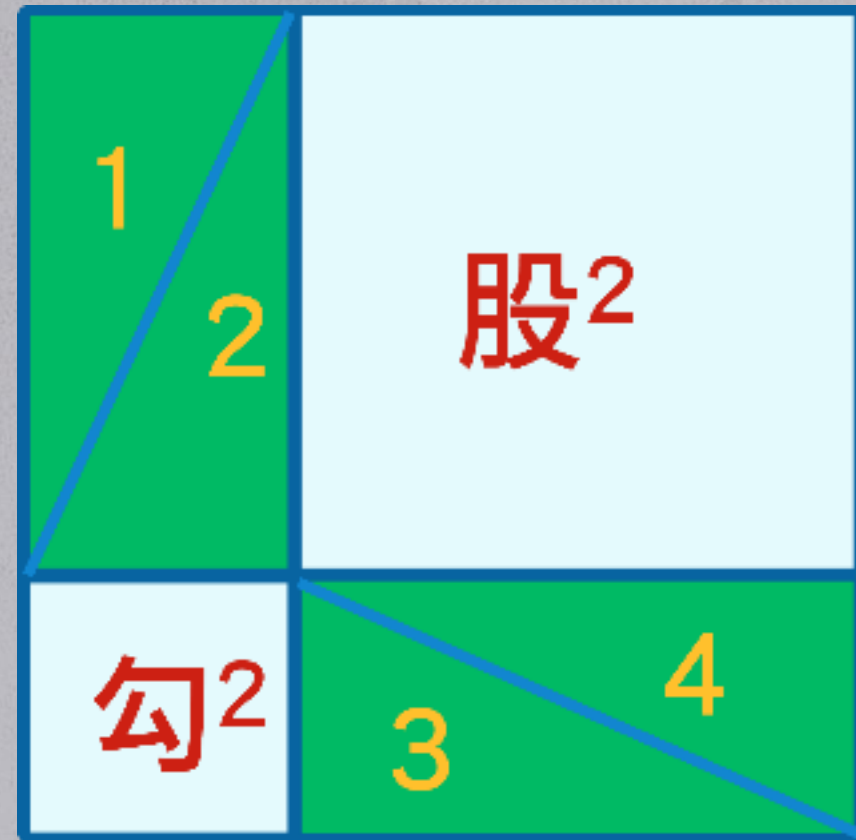
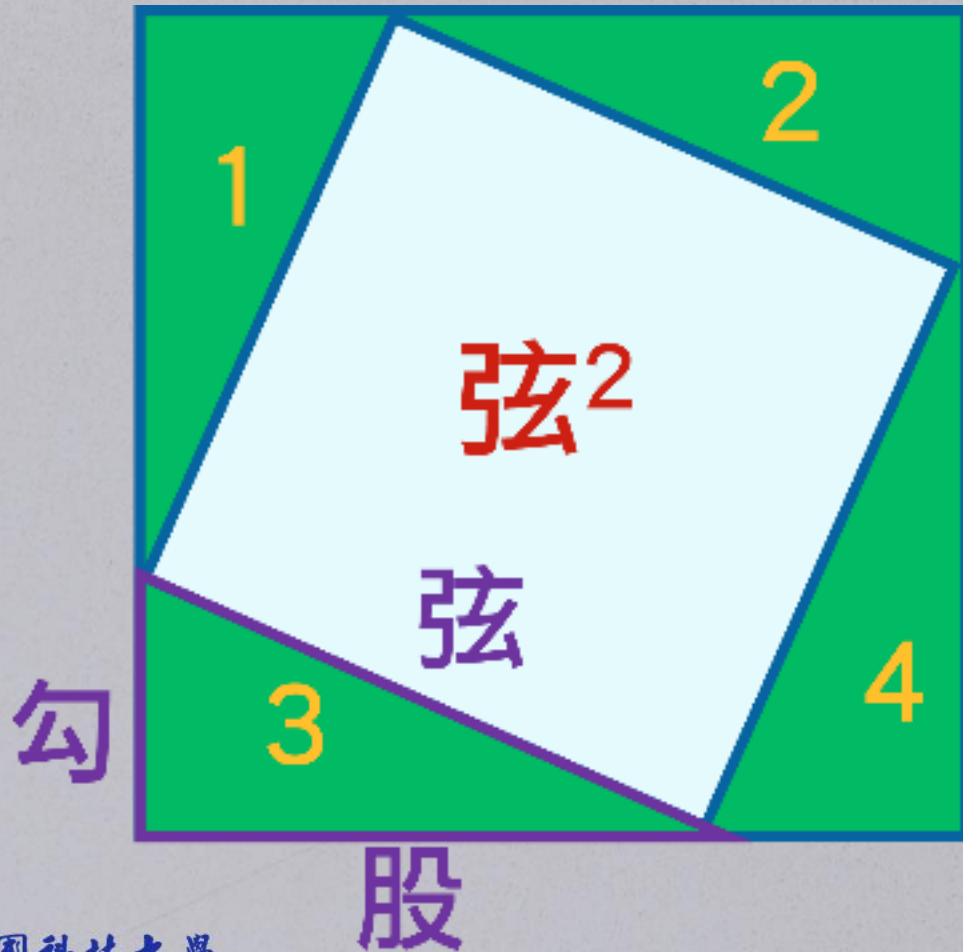
$$4 \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = c^2$$

$$\Rightarrow 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = c^2$$

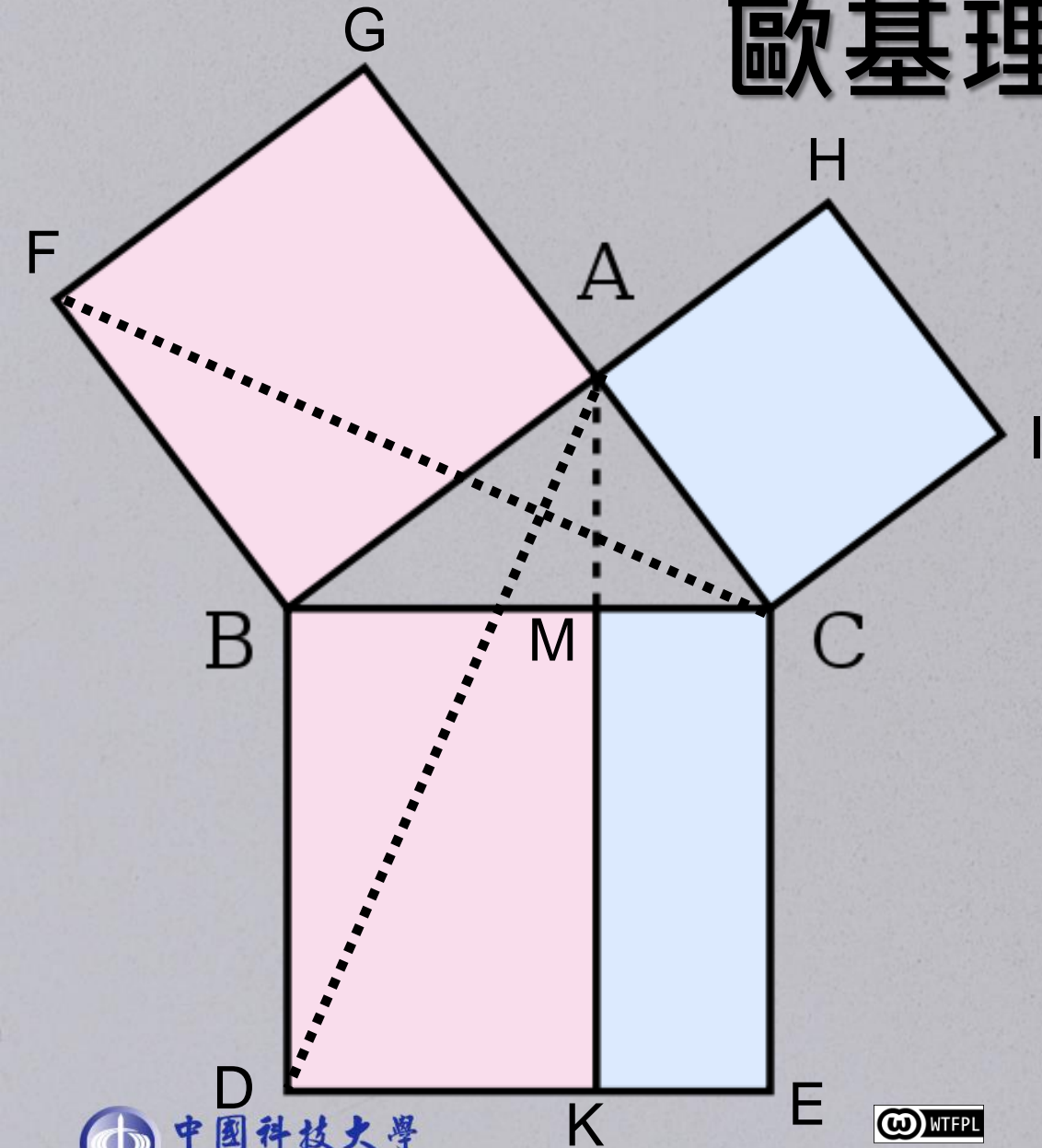
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

大正方形的面積等於4個直角三角形的面積加上小正方形的面積

圖形重新排列證法



歐基理得證法

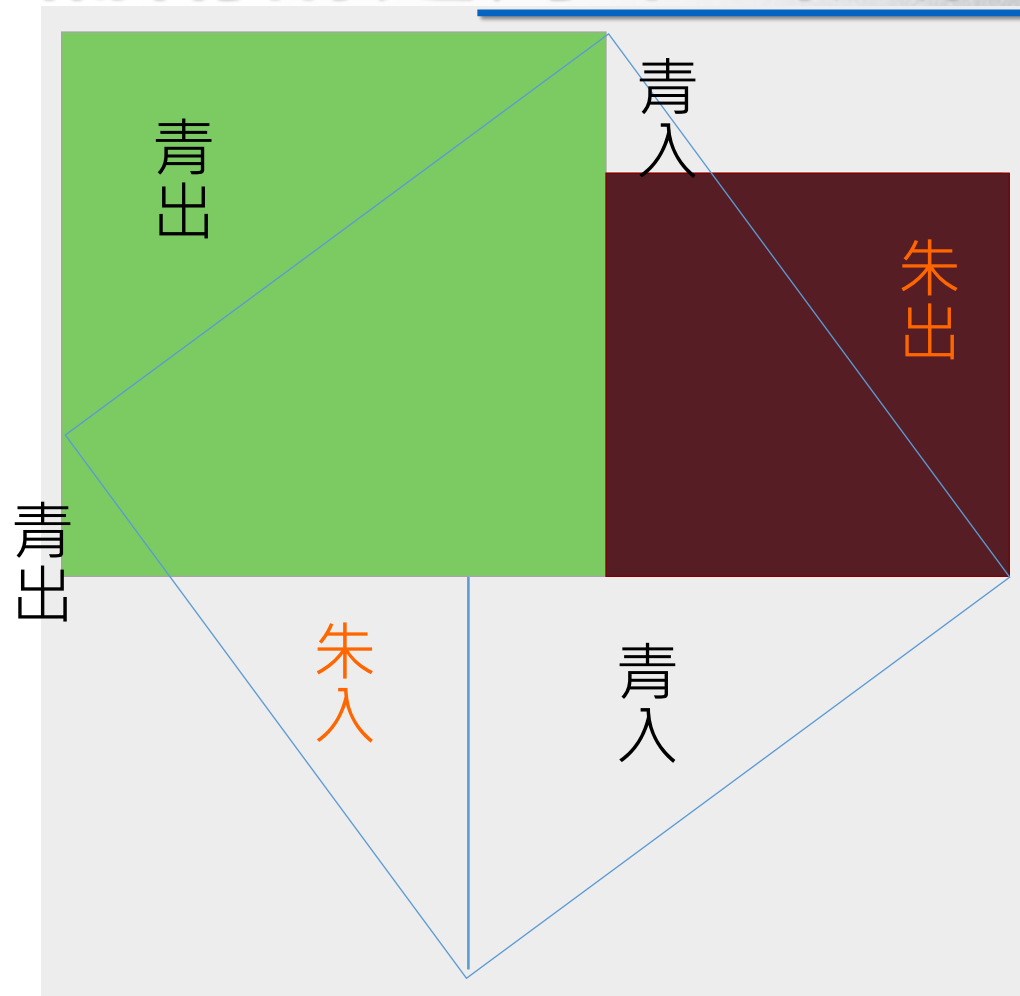


1. \because 矩形 $BDKM$ 面積
 $= 2$ 倍三角形 ABD 面積
 又 $\because \triangle ABD \cong \triangle BCF$
 \therefore 矩形 $BDKM$ 面積
 $= 2$ 倍三角形 BCF 面積
 $=$ 正方形 $ABFG$ 面積

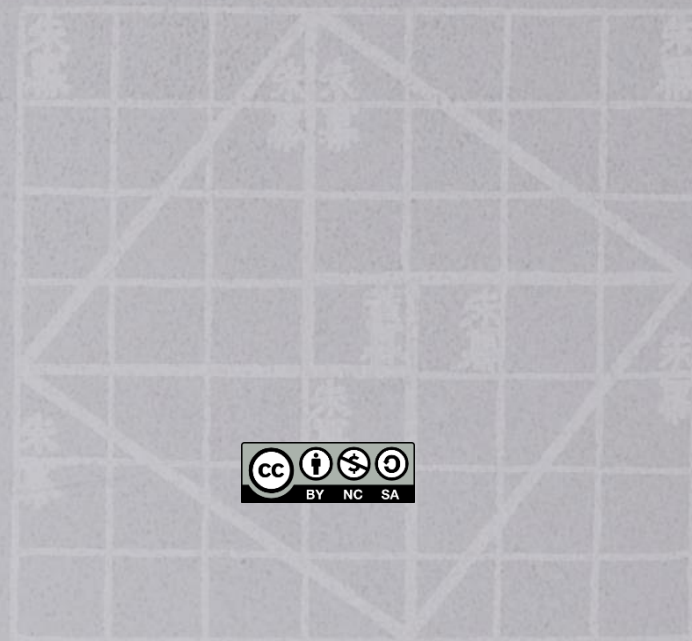
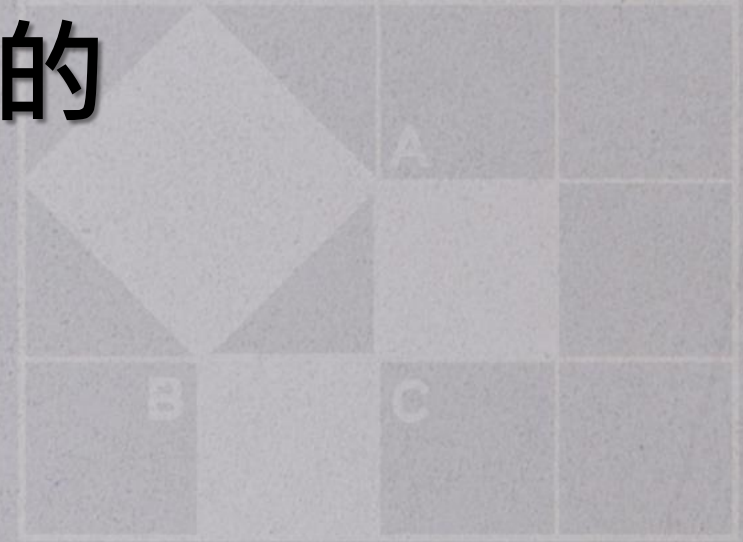
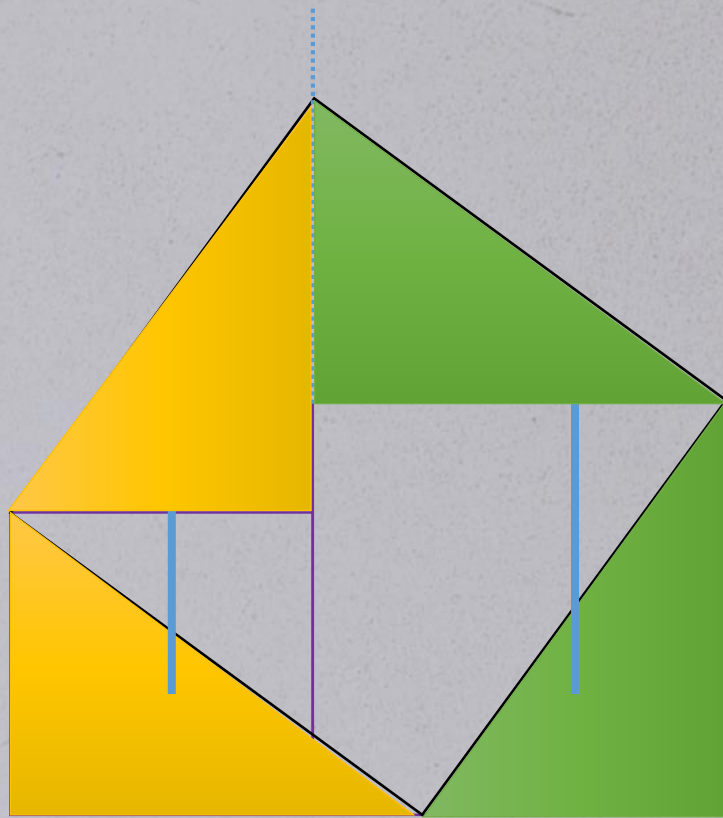
2. 同理, 矩形 $CEKM$ 面積
 $=$ 正方形 $ACIH$ 面積

3. 由 1. 2. 可知
 正方形 $BCED$ 面積 $=$
 正方形 AFG 面積 $+ 正方形 ACIH$ 面積
 $\Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

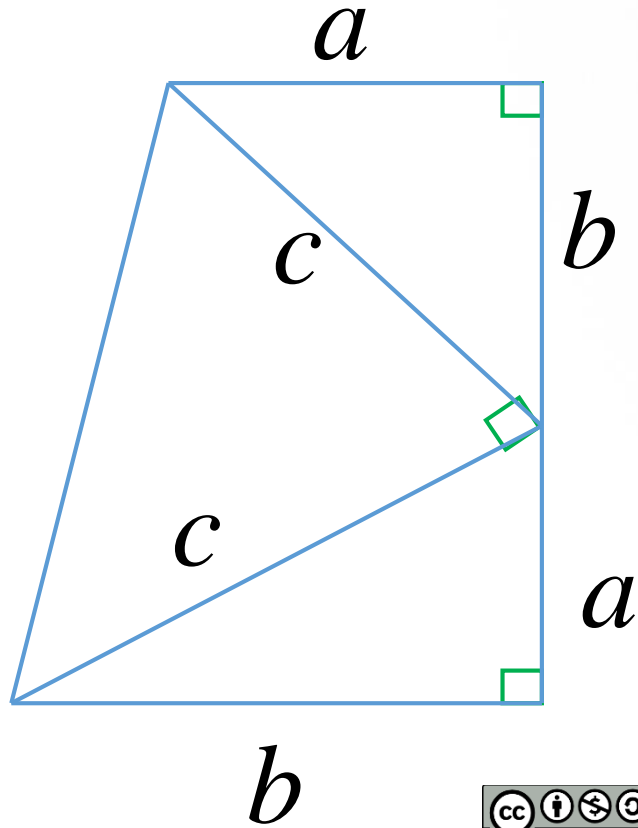
魏晉時期數學家劉徽的證法 補割術之青朱出入圖



清朝的梅文鼎 (1633-1721年) 的 《勾股舉隅》



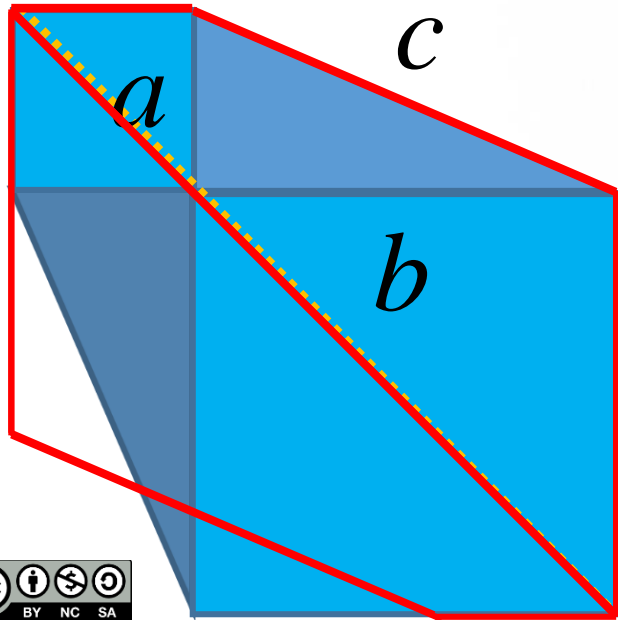
美國第二十屆總統加菲爾德 在擔任共和黨議員時(1876年)所提出的證明



$$\frac{(a+b)^2}{2} = 2 \times \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$



達文西的證法



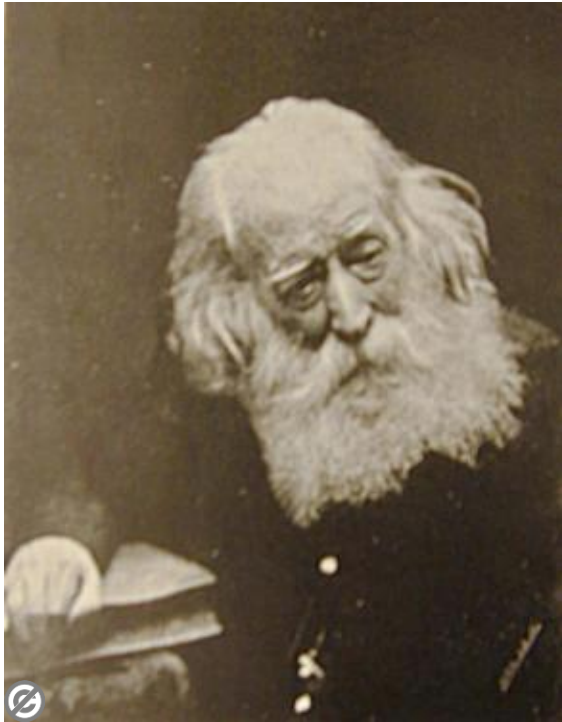
沿虛線剪開，取一片上下顛倒與另一片沿虛線拼貼。



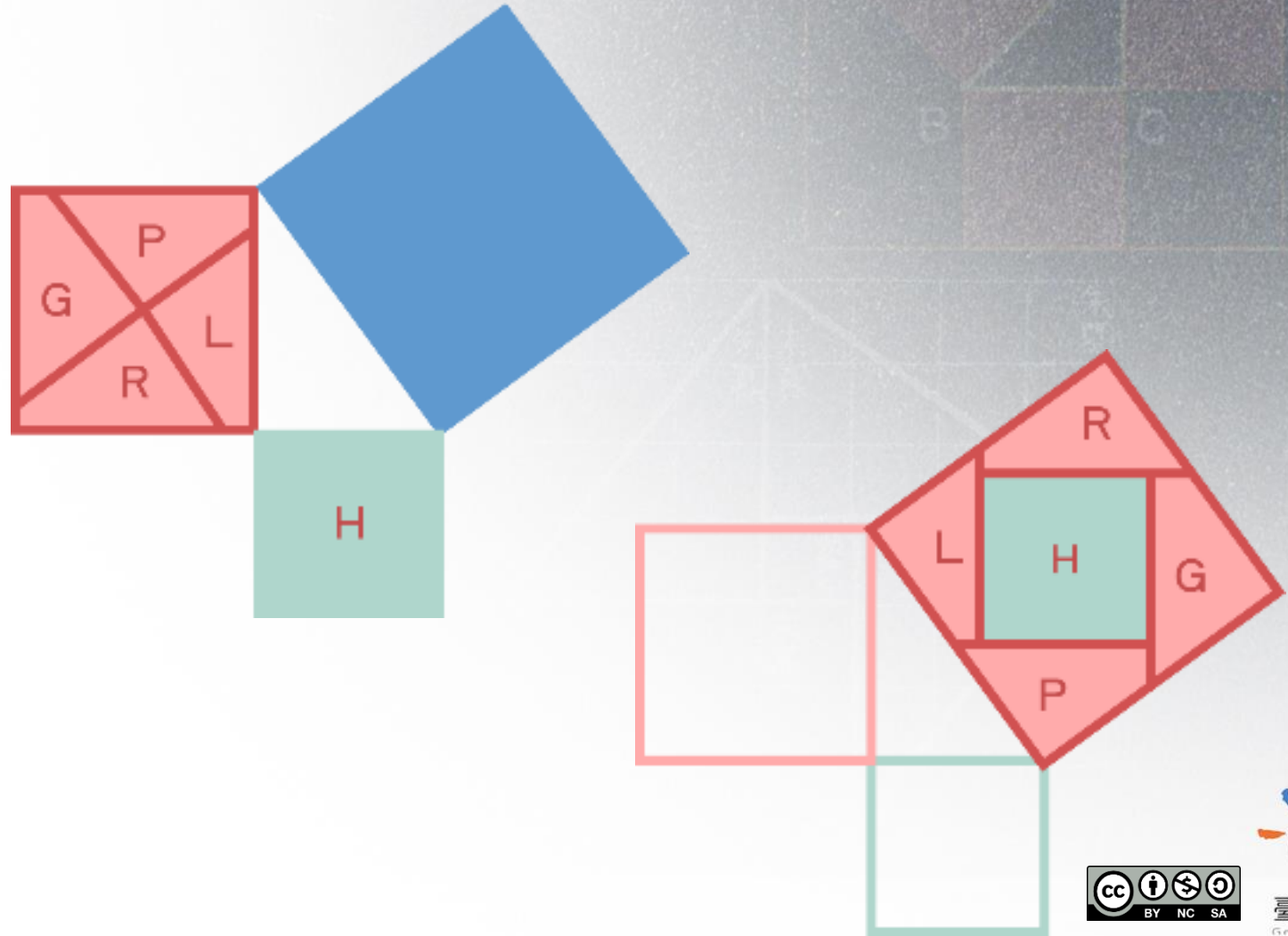
你能看出右圖和左圖的關係嗎？



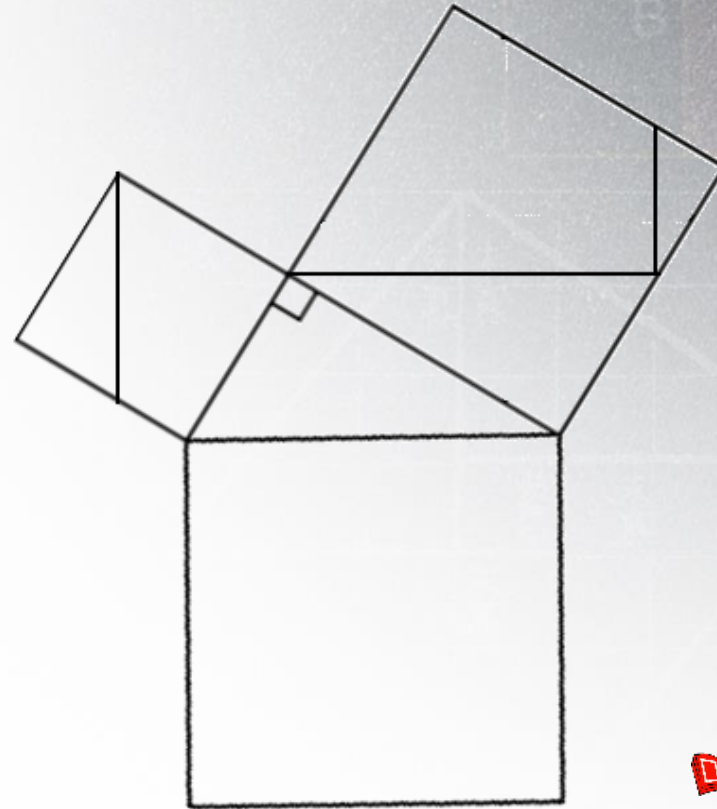
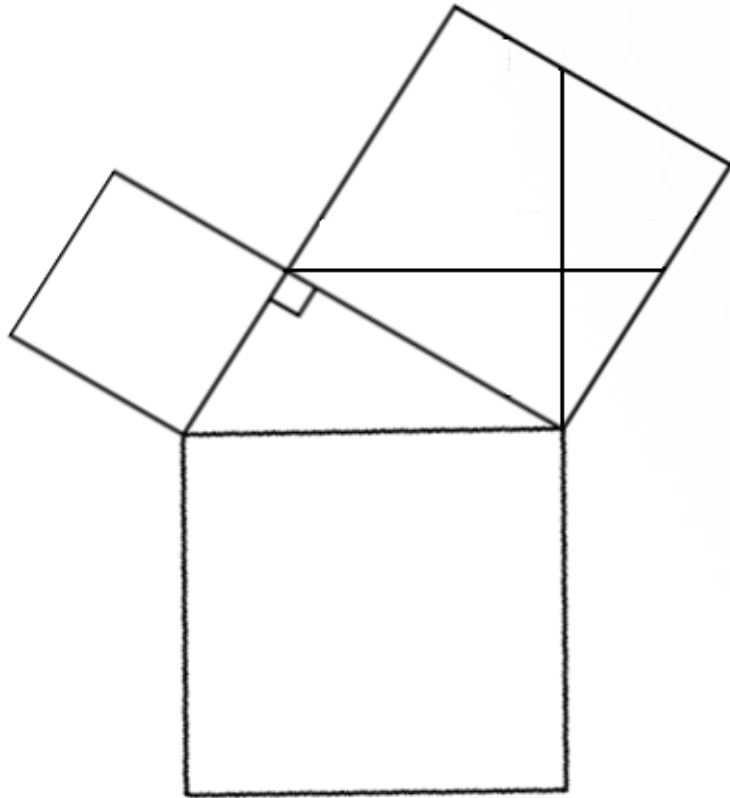
伯里加 (Perigal) 的證法

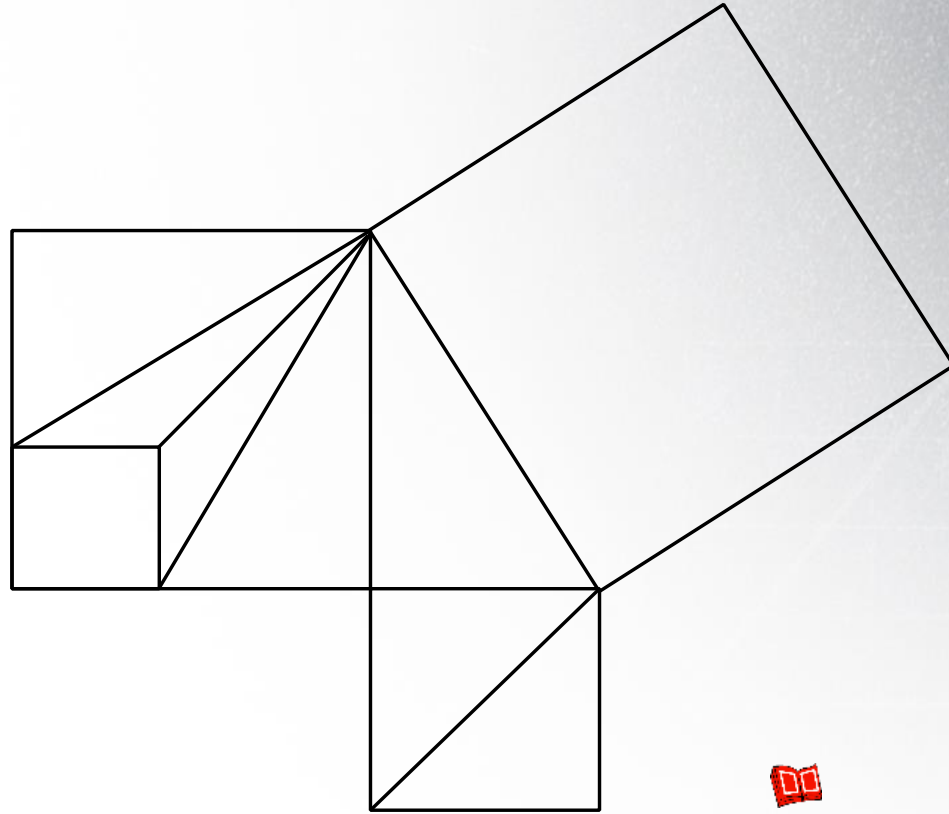


Henry Perigal (1801 – 1898) ,
英國業餘數學家



拼圖法








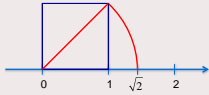

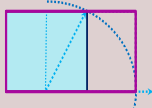

參考資料

- 「黃金比例」 Mario Livio 著，丘宏義 譯，時報出版。
- 「數學和數學家的故事」凡異出版。
- 「歡迎光臨數學美術館」井上正允著，益智工房出版。
- 「商高定理簡史及證明方法」楊惠后著，科學教育月刊第252期。
- 「商高定理」
https://market.cloud.edu.tw/content/junior/math/ch_yl/hist_2.htm

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
1	2			Flickr ionea. https://www.flickr.com/photos/ionea76/3784875434 2018/8/7 visited
2	4			中國科技大學 徐惠莉
3	5 6			中國科技大學 徐惠莉
4	7 8			中國科技大學 徐惠莉
5	10			中國科技大學 徐惠莉

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
6	12			Wikimidia Commons original uploader was Galilea at German Wikipedia https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg 2018/8/6 visited
7	13			黃金比例，Mario Livio 著，丘宏義 譯，遠流出版，P.51，圖 2-3。 本資料庫係根據中華民國著作權法第 46、52 及 65 條合理使用本作品。
8	15			Wikimedia Commons Artist Raphael (1483–1520), source: Stitched together from vatican.va https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%22The_School_of_Athens%22_by_Raffaello_Sanzio_da_Urbino.jpg 2018/8/6 visited This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET
9	17			中國科技大學 徐惠莉
10	18			中國科技大學 徐惠莉

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
11	18			中國科技大學 徐惠莉
12	19			中國科技大學 羅心好
13	20			中國科技大學 羅心好
14	21			中國科技大學 徐惠莉
15	23			<p>Wikimedia Commons user: Gribeco (talk contribs), source: image copied from Plimpton 322</p> <p>This work is in the public domain in its country of origin and other countries and areas where the copyright term is the author's life plus 70 years or less.</p> <p>https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg 2018/8/6 visited</p> <p>This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET</p>

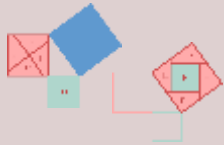



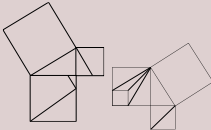

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
16	30			Wikimedia Commons user: Avsa (talk contribs), Source: Chinese Pythagorean theorem, from page 22 of Joseph Needham's <i>Science and Civilization in China: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth</i> , published in 1986 by Cave Books Ltd., based in Taipei (with permission from Cambridge University Press). isbn:0521058015 This work is in the public domain in its country of origin and other countries and areas where the copyright term is the author's life plus 70 years or less. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chinese_pythagoras.jpg 2018/8/6 visited This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET
17	31			中國科技大學 徐惠莉
18	32			中國科技大學 羅心好
19	33			Wikimedia Commons Gerbrant (talk contribs) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Illustration_to_Euclid%27s_proof_of_the_Pythagorean_theorem.svg 2018/8/6 visited
20	34			中國科技大學 徐惠莉

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
21	34			Wikimedia Commons Ymaccn https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Qzzrtcn.gif 2018/8/6 visited
22	35			中國科技大學 徐惠莉
23	36			中國科技大學 徐惠莉
24	37			中國科技大學 徐惠莉
25	38			Wikimedia Commons Gian-, source: On the dissecting table plus.maths.org https://en.wikipedia.org/wiki/File:Henry_Perigal.jpg 2018/8/10 visited This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
26	38			中國科技大學 羅心好
27	39			歡迎光臨數學美術館，第 3 章探索擱眼翻轉之謎，井上正允著，益智工房出版，69, 72 頁 本資料庫係根據中華民國著作權法第 46&52&65 條合理使用本作品。
28	40			數字奇航，第 2 章看吧！Alex Bellos 著，胡守仁 譯，時報出版，73 頁 本資料庫係根據中華民國著作權法第 46&52&65 條合理使用本作品。