

Unit 12 自然演繹法

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示
—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

Unit 12 自然演繹法

- 除了命題邏輯的推論規則之外，還需要處理量詞的規則。
- 量詞規則的分類：個例規則、通稱規則、否定規則。

真值樹法與自然演繹法的差別在於：自然演繹法的限制在於無法證明其為有效論證，真值樹法卻可以。

自然演繹法與真值樹法不同處在於：真值樹法只有分解規則，在量詞中只有個例化規則，然自然演繹法不僅有個例化規則，尚有普遍化規則。

Unit 12 自然演繹法

- (1) 全稱個例規則：(UI, universal instantiation)

$$\frac{(\forall x)\varphi(x)}{\varphi(n/x)}$$

- 此處出現的 n 代表所有出現過的名稱，也可以說沒有限制。

遇到for all x ， x 可帶任意名稱。

Unit 12 自然演繹法

- (2) 全稱通稱規則：(UG, universal generalization)

$$\frac{\varphi(n)}{(\forall x)\varphi(x/n)}$$

- 此處出現的 n 不能是已有特定指涉的名稱符號，也不能是由 EI 規則得到的語句中的名稱符號。

原來是 $\varphi(n)$ ，要變成 $\forall x\varphi x$ ，這會有問題，比如：

我說：「班上A被我當掉了。」

同學問：「A是誰？」

我說：「我不知道，反正A被我當掉了。」

然後同學就很悲傷的說：「班上所有人都被當掉了。」

因對所有 x 來說， x 都被當掉了。

比如：

全班過年的壓歲錢都超過十萬，就得到一個個例，有個A壓歲錢超過十萬，那我可以推回所有人壓歲錢都超過十萬，因我是從 $\forall x$ 得來，若非由 $\forall x$ 得來，就不能推回去，此為其限制。

能否用此規則的限制在於：

一、不可為個體常元，必須原來即為 **name latter** 的角色。

二、它必須要由 $\forall x$ 來，也就是須從全稱量詞來，不可從存在量詞來。若是由全稱量詞個例化再普遍化，是可以的，若是由存在量詞被個例化，便不可普遍化。

因此若此推論是，班上有些人壓歲錢十萬塊以上，得到有人壓歲錢十萬塊以上，因此全班壓歲錢皆十萬塊以上，便不合理。

Unit 12 自然演繹法

- (3) 存在通稱規則：(EG, existential generalization)

$$\frac{\varphi(n)}{(\exists x)\varphi(x/n)}$$

- 此處出現的 n 沒有限制。

Unit 12 自然演繹法

- (4) 存在個例規則：(EI, existential instantiation)

$$\frac{(\exists x)\varphi(x)}{\varphi(n/x)}$$

- 此處出現的 n 必須是未出現過名稱符號，也就是必須確定是第一次出現。

必須確定所用的name latter前面沒用過。

Unit 12 自然演繹法

- 否定規則：(QN)
- 定義： $(\exists x)\varphi(x) =_{\text{df.}} \neg(\forall x)\neg\varphi(x)$
- $\vdash (\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\varphi(x)$
- $\vdash \neg(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$
- $\vdash (\forall x)\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$
- $\vdash \neg(\exists x)\neg\varphi(x) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x)$

Unit 12 自然演繹法

- 實例說明：

- (a) $(\forall x)Px, (\exists y)Py \rightarrow (\forall x)Qx, (\forall x)(Qx \rightarrow Rx) \vdash (\exists x)(Qx \wedge Rx)$
- (b) $(\forall x)(Kx \rightarrow \neg Mx), (\forall x)(Kx \vee Nx), (\forall x)(\neg Kx \vee Mx) \vdash (\exists x)(\neg Kx \wedge Nx)$
- (c) $\neg(\exists x)(\neg Cx \wedge Dx), (\exists x)Dx \vdash (\exists x)Cx$
- (d) $(\forall x)(Bx \rightarrow Cx), (\forall x)(Ax \leftrightarrow \neg Bx) \vdash (\exists x)(Ax \vee Cx)$
- (e) $(\forall x)(\forall y)Fxy \vdash (\forall y)(\forall x)Fxy$
- (f) $(\forall x)(\forall y)Fxy \vdash (\forall x)(\forall y)Fyx$

Unit 12 自然演繹法

- (a)
- 1. $(\forall x)P_x$
- 2. $(\exists y)P_y \rightarrow (\forall x)Q_x$
- 3. $(\forall x)(Q_x \rightarrow R_x)$

目標

- $(\exists x)(Q_x \wedge R_x)$

從結論推想，既是 $Q_x \wedge R_x$ ，則便須要 $Q_a \wedge R_a$ 或 $Q_b \wedge R_b$ ，最後用存在通則化(EG)即可。

從前提找，有 $Q_x \rightarrow R_x$ ，第三個前提告訴我們若有 Q_a ，便可有 R_a 。

Unit 12 自然演繹法

- (a)
- 1. $(\forall x)P_x$ Pr
- 2. $(\exists y)P_y \rightarrow (\forall x)Q_x$ Pr
- 3. $(\forall x)(Q_x \rightarrow R_x)$ Pr
- 4. P_a _____
- 5. $(\exists y)P_y$ _____
- 6. $(\forall x)Q_x$ _____
- 7. Q_a _____
- 8. $Q_a \rightarrow R_a$ _____
- 9. R_a _____
- 10. $Q_a \wedge R_a$ _____
- 11. $(\exists x)(Q_x \wedge R_x)$ _____

推論步驟的建構是目標導向，因此要想辦法得到結論。

Unit 12 自然演繹法

• (a)	
• 1. $(\forall x)Px$	<u>Pr</u>
• 2. $(\exists y)Py \rightarrow (\forall x)Qx$	<u>Pr</u>
• 3. $(\forall x)(Qx \rightarrow Rx)$	<u>Pr</u>
• 4. Pa	<u>1, UI</u>
• 5. $(\exists y)Py$	<u>4, EG</u>
• 6. $(\forall x)Qx$	<u>2,5 MP</u>
• 7. Qa	<u>6, UI</u>
• 8. $Qa \rightarrow Ra$	<u>3, UI</u>
• 9. Ra	<u>7,8 MP</u>
• 10. $Qa \wedge Ra$	<u>7,9 Conj</u>
• 11. $(\exists x)(Qx \wedge Rx)$	<u>10, EG</u>

Unit 12 自然演繹法

- (b)
- 1. $(\forall x)(Kx \rightarrow \neg Mx)$
- 2. $(\forall x)(Kx \vee Nx)$
- 3. $(\forall x)(\neg Kx \vee Mx)$

目
標



- $(\exists x)(\neg Kx \wedge Nx)$

有三前提，要得到結論，思路應該如何？結論是 $\wedge$ ，從前面那裡可以得到 Ka ，三個前提都有，然都是選言，大概的思考是去否定一個來得到另一個，這有點麻煩， Mx 又要靠 Ka 。這想法要利用到條件句的三段論，就是 P 則 Q ， Q 則 R ，以得到 P 則 R 。

Unit 12 自然演繹法

- (b) 1. $(\forall x)(Kx \rightarrow \neg Mx)$ Pr
- 2. $(\forall x)(Kx \vee Nx)$ Pr
- 3. $(\forall x)(\neg Kx \vee Mx)$ Pr
- 4. $\neg Ka \vee Ma$ _____
- 5. $Ma \vee \neg Ka$ _____
- 6. $\neg \neg Ma \vee \neg Ka$ _____
- 7. $\neg Ma \rightarrow \neg Ka$ _____
- 8. $Ka \rightarrow \neg Ma$ _____
- 9. $Ka \rightarrow \neg Ka$ _____
- 10. $\neg Ka \vee \neg Ka$ _____
- 11. $\neg Ka$ _____
- 12. $Ka \vee Na$ _____
- 13. Na _____
- 14. $\neg Ka \wedge Na$ _____
- 15. $(\exists x)(\neg Kx \wedge Nx)$ _____

自然演繹法中、此所見的a、b、c均為name latter，而非個體常元的角色，否則便無法使用UG。

自然演繹法特點是證明並非唯一，可以找到其他方式，重要的是目標導向的證明，要設法得到結論。盲點是若為無效論證，是無法證明，此及自然演繹法的盲點。

知道這樣證，是需要一些天賦或洞見(insight)，需要訓練的，自然演繹法中沒有標準作業流程，但有一些策略，以訓練思考。

初接觸邏輯，最大的困擾就是「我怎麼知道要這樣證？」我們只能提供一些策略，多加練習。

Unit 12 自然演繹法

• (b) 1. $(\forall x)(Kx \rightarrow \neg Mx)$	<u>Pr</u>
• 2. $(\forall x)(Kx \vee Nx)$	<u>Pr</u>
• 3. $(\forall x)(\neg Kx \vee Mx)$	<u>Pr</u>
• 4. $\neg Ka \vee Ma$	<u>3, UI</u>
• 5. $Ma \vee \neg Ka$	<u>4, Comm</u>
• 6. $\neg \neg Ma \vee \neg Ka$	<u>5, DN</u>
• 7. $\neg Ma \rightarrow \neg Ka$	<u>6, Impl</u>
• 8. $Ka \rightarrow \neg Ma$	<u>1, UI</u>
• 9. $Ka \rightarrow \neg Ka$	<u>7, 8, HS</u>
• 10. $\neg Ka \vee \neg Ka$	<u>9, Impl</u>
• 11. $\neg Ka$	<u>10, Taut</u>
• 12. $Ka \vee Na$	<u>2, UI</u>
• 13. Na	<u>11, 12, DS</u>
• 14. $\neg Ka \wedge Na$	<u>11, 13, Conj</u>
• 15. $(\exists x)(\neg Kx \wedge Nx)$	<u>14, EG</u>

Unit 12 自然演繹法

- (c)
- 1. $\neg(\exists x)(\neg Cx \wedge Dx)$
- 2. $(\exists x)Dx$

目
標



- $(\exists x)Cx$

Unit 12 自然演繹法

- (c)
- 1. $\neg(\exists x)(\neg Cx \wedge Dx)$ Pr
- 2. $(\exists x)Dx$ Pr
- 3. $(\forall x)\neg(\neg Cx \wedge Dx)$ _____
- 4. $(\forall x)(\neg\neg Cx \vee \neg Dx)$ _____
- 5. Da _____
- 6. $\neg\neg Ca \vee \neg Da$ _____
- 7. $Ca \vee \neg Da$ _____
- 8. $\neg\neg Da$ _____
- 9. Ca _____
- 10. $(\exists x)Cx$ _____

證明若是對所有的x就不能這樣推，為什麼？就是它的a從那來，是從前提二來的，所以最後不能用UG規則。

比如：班上有同學期末滿分，無法進一步推論所有人都滿分。

Unit 12 自然演繹法

• (c)	
• 1. $\neg(\exists x)(\neg Cx \wedge Dx)$	Pr
• 2. $(\exists x)Dx$	Pr
• 3. $(\forall x)\neg(\neg Cx \wedge Dx)$	1, QN
• 4. $(\forall x)(\neg\neg Cx \vee \neg Dx)$	3, DeM
• 5. Da	2, EI
• 6. $\neg\neg Ca \vee \neg Da$	4, UI
• 7. $Ca \vee \neg Da$	6, DN
• 8. $\neg\neg Da$	5, DN
• 9. Ca	7,8, DS
• 10. $(\exists x)Cx$	9, EG

Unit 12 自然演繹法

- (d)
- 1. $(\forall x)(Bx \rightarrow Cx)$
- 2. $(\forall x)(Ax \leftrightarrow \neg Bx)$

目
標

- $(\exists x)(Ax \vee Cx)$

顯然中間者是Bx

Unit 12 自然演繹法

- (d) 1. $(\forall x)(Bx \rightarrow Cx)$ _____
- 2. $(\forall x)(Ax \leftrightarrow \neg Bx)$ _____
- 3. $Aa \leftrightarrow \neg Ba$ _____
- 4. $(Aa \rightarrow \neg Ba) \wedge (\neg Ba \rightarrow Aa)$ _____
- 5. $\neg Ba \rightarrow Aa$ _____
- 6. $\neg Aa \rightarrow \neg \neg Ba$ _____
- 7. $\neg Aa \rightarrow Ba$ _____
- 8. $Ba \rightarrow Ca$ _____
- 9. $\neg Aa \rightarrow Ca$ _____
- 10. $\neg \neg Aa \vee Ca$ _____
- 11. $Aa \vee Ca$ _____
- 12. $(\exists x)(Ax \vee Cx)$ _____

Unit 12 自然演繹法

• (d) 1. $(\forall x)(Bx \rightarrow Cx)$	<u>Pr</u>
• 2. $(\forall x)(Ax \leftrightarrow \neg Bx)$	<u>Pr</u>
• 3. $Aa \leftrightarrow \neg Ba$	<u>2, UI</u>
• 4. $(Aa \rightarrow \neg Ba) \wedge (\neg Ba \rightarrow Aa)$	<u>3, Equiv</u>
• 5. $\neg Ba \rightarrow Aa$	<u>4, Simp</u>
• 6. $\neg Aa \rightarrow \neg \neg Ba$	<u>5, Contra</u>
• 7. $\neg Aa \rightarrow Ba$	<u>6, DN</u>
• 8. $Ba \rightarrow Ca$	<u>1, UI</u>
• 9. $\neg Aa \rightarrow Ca$	<u>7, 8, HS</u>
• 10. $\neg \neg Aa \vee Ca$	<u>9, Impl</u>
• 11. $Aa \vee Ca$	<u>10, DN</u>
• 12. $(\exists x)(Ax \vee Cx)$	<u>11, EG</u>

Unit 12 自然演繹法

- (e)

-

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

目
標



- $(\forall y)(\forall x)F_{xy}$

Unit 12 自然演繹法

- (e)

-

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

- 2. $(\forall y)F_{ay}$

- 3. F_{ab}

- 4. $(\forall x)F_{xb}$

- 5. $(\forall y)(\forall x)F_{xy}$

Pr

Unit 12 自然演繹法

- (e)

-

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

- 2. $(\forall y)F_{ay}$

- 3. F_{ab}

- 4. $(\forall x)F_{xb}$

- 5. $(\forall y)(\forall x)F_{xy}$

Pr

1, UI

2, UI

3, UG

4, UG

Unit 12 自然演繹法

- (f)

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$

目標
↓

- $(\forall x)(\forall y)F_{yx}$

Unit 12 自然演繹法

- (f)

- 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$
- 2. $(\forall y)F_{ay}$
- 3. F_{ab}
- 4. $(\forall y)F_{yb}$
- 5. $(\forall x)(\forall y)F_{yx}$

Pr

Unit 12 自然演繹法

- (f)

• 1. $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$	<u>Pr</u>
• 2. $(\forall y)F_{ay}$	<u>1, UI</u>
• 3. F_{ab}	<u>2, UI</u>
• 4. $(\forall y)F_{yb}$	<u>3, UG</u>
• 5. $(\forall x)(\forall y)F_{yx}$	<u>4, UG</u>