

Unit II 真值樹系統

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示
—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

Unit II 真值樹系統

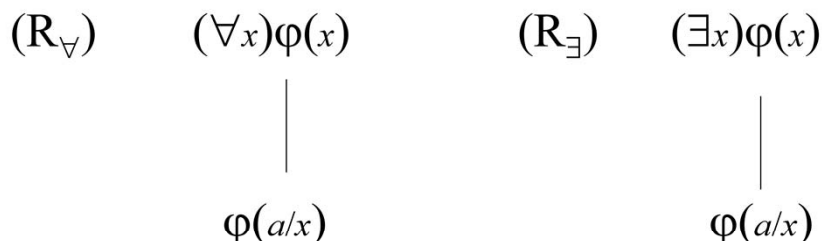
- 除了命題邏輯引進的真值樹系統推論規則之外，述詞邏輯的真值樹系統因為量詞的出現，需要引進新的規則。
- 回顧一下，真值樹系統的規則是分解規則，因此只有個例化(instantiation)規則而沒有通稱化(generalization)規則。

m-1212 00:19:57

第十一單元就是述詞邏輯的演算，除了原有的規則保留，我們在這邊只進來兩個新的規則。

第一個規則，因為我們只有分解，所以我們不需要做通則化規則，我們在這裡只有做個例化規則。

Unit II 真值樹系統



- 規則 $(R_{\forall})$ 中出現的名稱符號 a 代表推論過程所有出現過的名稱符號。
- 規則 $(R_{\exists})$ 中出現的名稱符號 a 代表是新的、尚未出現過的名稱符號。

m-1212 00:20:59

首先來看， $\forall$ 的規則。當我們看到 $\forall$ 的時候，我們用任何一個name，就是 a 、 b 、 c ...，去取代 x ，因為他是 $\forall$ ，所以你要把所有出現過的name通通要帶進去。譬如說，我們有一個討論的範圍裡有 a 、 b 、 c ，所以在這個式子裡面你就要帶 a 、 b 、 c ，他會變成三個新式子。假設我們有一個東西是 $\forall xPx$ ，你發現在這個推論過程裡面出現了 abc ，因此你在推論的時候必須要有 Pa 、 Pb 、 Pc ，假如說你在分解 Pa 的時候，你發現這裡有個 $\neg Pa$ ，然後到 Pa 的時候就把他close掉，那這樣就不需要再繼續，因為再做也是多餘的。我說要繼續做的意思是，萬一某個分枝沒有close掉，也就是該分枝仍然是一個open branch的時候，那就必須全部完整的分解出來，這個就是全稱的意思。

再來這個是存在量號，這個規則是這樣，我這裡用一個name去取代他，這個name規定是要在推論過程裡面未曾出現，也就是它必須是個new name。

譬如說，假設我們在推論過程中已經出現 a 、 b ，我們就必須在過程中加入新的name叫做 c 。

不同邏輯系統的老師講解的方式不盡然相同，譬如說，有的老師會說既然是new name，存在有這個東西不代表他一定代表特定哪一個，假設他是 $\exists xPx$ ，他帶下來就可以變成 Px ，他就不一定要用 abc 來帶。

所以如果各位看到這個也不用害怕，他只是符號不一樣，其實概念都是差不多的。我們的原則很簡單，規則 $(R_{\forall})$ 中出現過的名稱符號，你就必須全部都帶進去。規則 $(R_{\exists})$ 中出現的名稱符號，你就必須找一個新的名稱符號帶進去。

Unit II 真值樹系統

$$\begin{array}{ccc}
 (R_{\neg\forall}) \quad \neg(\forall x)\phi(x) & & (R_{\neg\exists}) \quad \neg(\exists x)\phi(x) \\
 | & & | \\
 (\exists x)\neg\phi(x) & & (\forall x)\neg\phi(x)
 \end{array}$$

- 量詞前出現否定號的規則，其目的就是將以否定號開頭的語句轉變成以量詞開頭的語句，再以 $(R_{\forall})$ 和 $(R_{\exists})$ 規則消除量詞。

m-1212 00:28:40

這個規則其實是前面的QN規則，我們簡單複習一下，這個 $\neg$ 掃過去， $\forall$ 就會變成 $\exists$ ： $\exists$ 就會變成 $\forall$ ，掃過去之後他就會變成剛剛的規則，一個是全稱量號規則，一個是存在量號規則。

各位記得量號的位置不一樣，所表示的語句也不一樣，所以當我們在做的時候一定要從第一個開始。

事實上我們在做推論的時候常會遇到一個麻煩，就是有些東西他在分解的時候是無限的，而且是我們沒有辦法給出任何的interpretation的，譬如我舉個例子，例如像 $(\forall x)(\exists y)Rxy$ ，第一個句子， $(\exists y)Ray$ ，到這裡發現變 $\exists$ ，所以我們要代 Rab ，就變成 $(\exists y)Rby$ ，以此類推...，各位會發現這樣的句子做的完嗎？所以這樣的句子我們沒辦法給它一個說明，或者說無法建立一個模型，這個問題，我們往後會再和大家說明。

所以這個很簡單，只是純粹去除他的量號而已。

Unit II 真值樹系統

- 實例說明：

- (a) $(\forall x)(Mx \rightarrow Px), (\forall x)(Sx \rightarrow Mx) \vdash (\forall x)(Sx \rightarrow Px)$
- (b) $(\forall x)(Mx \rightarrow Px), (\forall x)(Mx \rightarrow Sx) \vdash (\forall x)(Sx \rightarrow Px)$
- (c) $(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Px), (\exists x)(Sx \wedge Mx) \vdash (\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$
- (d) $(\forall x)(\neg Px \rightarrow Mx), (\exists x)(Sx \wedge Mx) \vdash (\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$
- (e) $(\exists x)(Px \wedge Mx), (\exists x)(Sx \wedge Mx) \vdash (\exists x)(Sx \wedge Px)$

m-1212 00:34:02

第一部分先來做比較簡單的，我們利用范恩圖解及亞里斯多德的方法去決定他不是一個有效論證。所以我們來看，第一個a，第一句話就是所有的M都是P，第二句話就是所有的S都是M，第三句話就是所有的S都是P。第三個c，第一句話就是所有的M都不是P，第二句話就是有些S是M，第三句話就是有些S不是P。所以跟我們之前學的東西其實都一樣，只是換另一種系統來操作。

Unit II 真值樹系統

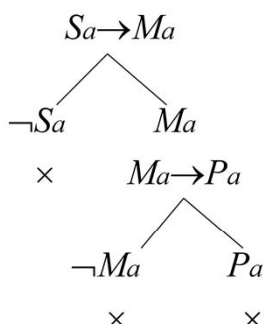
- (a) $(\forall x)(Mx \rightarrow Px), (\forall x)(Sx \rightarrow Mx) \vdash (\forall x)(Sx \rightarrow Px)$

$$\begin{array}{c}
 (\forall x)(Mx \rightarrow Px) \\
 (\forall x)(Sx \rightarrow Mx) \\
 \neg(\forall x)(Sx \rightarrow Px) \\
 | \\
 (\exists x)\neg(Sx \rightarrow Px) \\
 \neg(Sa \rightarrow Pa) \\
 | \\
 Sa \\
 \neg Pa \\
 |
 \end{array}$$

m-1212 00:35:27

首先來看第一個，先寫樹根，將第一個前提 $(\forall x)(Mx \rightarrow Px)$ 寫下來，再來寫下 $(\forall x)(Sx \rightarrow Mx)$ ，然後再寫結論的否定 $\neg(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$ 。通常我們會從存在量號開始下手，比較簡單一點。第一步先把 $\neg$ 掃過去， $\neg(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$ 就會變成 $(\exists x)\neg(Sx \rightarrow Px)$ ，再來既然這邊是 $\exists$ ，這邊就給他一個new name變成 $\neg(Sa \rightarrow Pa)$ ，接下來我們運用前面的規則來分解，就會得到 Sa 跟 $\neg Pa$ 。

Unit II 真值樹系統



- 由於所有的分枝都關閉，所以，論證(a)為有效論證。

m-1212 00:38:14

因為前面是 $\forall$ ，現在的name出現的是a，因此得到 $Sa \rightarrow Ma$ ，接下來根據剛剛的分解得到 $\neg Sa$ 、 Ma ，因為 $\neg Sa$ 跟上面的 Sa 產生矛盾，因此就把 $\neg Sa$ 這個branch close掉。

接下來因為前面 $(\forall x)(Mx \rightarrow Px)$ ，得到 Ma 分解就是 $Ma \rightarrow Pa$ ，然後根據前面的分解規則 $Ma \rightarrow Pa$ 可以分解成 $\neg Ma$ 跟 Pa ，因為前面有出現 $\neg Pa$ 跟 Ma ， Pa 和 $\neg Pa$ ， $\neg Ma$ 和 Ma 產生矛盾，就可以把它close掉，因此我們就得到了一個封閉樹，由於所有的分枝都關閉，我們就說這是一個有效論證。

Unit II 真值樹系統

- (b) $(\forall x)(Mx \rightarrow Px), (\forall x)(Mx \rightarrow Sx) \vdash (\forall x)(Sx \rightarrow Px)$

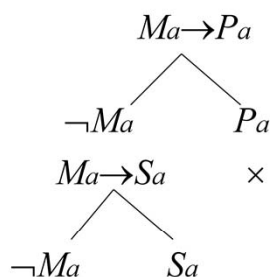
$$\begin{array}{c}
 (\forall x)(Mx \rightarrow Px) \\
 (\forall x)(Mx \rightarrow Sx) \\
 \neg(\forall x)(Sx \rightarrow Px) \\
 | \\
 (\exists x)\neg(Sx \rightarrow Px) \\
 \neg(Sa \rightarrow Pa) \\
 | \\
 Sa \\
 \neg Pa \\
 |
 \end{array}$$

m-1212 00:40:32

接下來我們來看第二個，如果是無效論證該怎麼辦？

一樣先將前提寫下 $(\forall x)(Mx \rightarrow Px)$ 、 $(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)$ ，以及結論的否定 $\neg(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$ ，再來把 $\neg$ 掃過去會得到 $(\exists x)\neg(Sx \rightarrow Px)$ ，然後放進一個new name，得到 $\neg(Sa \rightarrow Pa)$ ， $\neg(Sa \rightarrow Pa)$ 利用negation跟conditional的規則分解變成 Sa 跟 $\neg Pa$ 在同一分枝上。

Unit II 真值樹系統



- 有分枝是開放的，所以，論證(b)為無效論證。
- 反例：Domain: {a},

Ma	Pa	Sa
F	F	T



m-1212 00:42:08

接下來，將a代入 $(\forall x)(Mx \rightarrow Px)$ ，得到的個例為 $Ma \rightarrow Pa$ ，一樣把它分成兩邊 $\neg Ma$ 跟 Pa ，右邊的 Pa 顯然跟上面的 $\neg Pa$ 產生矛盾，因此把這邊close掉，接下來，再將a代入 $(\forall x)(Mx \rightarrow Sx)$ ，得到個例為 $Ma \rightarrow Sa$ ，分解成兩邊得到 $\neg Ma$ 跟 Sa ，結果兩邊都是open的，因此這是一個無效論證。

無效論證如何寫完整？為了讓各位覺得簡單一點，我必須告訴各位，他並不是一個完整的寫法，如果各位碰到一元的，我允許各位這樣寫。記得加Domain，告訴我你反例中出現的東西有多少。

第二個之前學過的，你就直接寫 $Ma \quad Pa \quad Sa$ 也可以，而 Ma 為假、 Pa 我們給他假， Sa 我們給他True。但應該寫成 $\neg Ma : \{a\}$ 、 $\neg Pa : \{a\}$ 、 $Sa : \{a\}$ ，我們其實是可以把一元述詞的邏輯系統，把他轉譯成我們的語句邏輯系統。

Unit II 真值樹系統

- (c) $(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Px), (\exists x)(Sx \wedge Mx) \vdash (\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$

$(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Px)$

$(\exists x)(Sx \wedge Mx)$

$\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$

|

$(\forall x)\neg(Sx \wedge \neg Px)$

$Sa \wedge Ma$

|

Sa

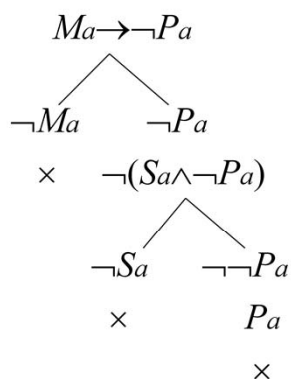
Ma

|

m-1212 00:48:32

我們來看第三個例子c，先寫下樹根部分 $(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Px)$ 、 $(\exists x)(Sx \wedge Mx)$ 、 $\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$ ，同樣的先把 $\neg$ 掃過 $\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$ ，得到 $(\forall x)\neg(Sx \wedge \neg Px)$ ，如果碰到的是 $\forall$ 開頭的，你不能把它刪掉，因為你可能還有其他的符號要帶，因此我們可以把 $\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$ 劃掉，這四個句子中只有 $(\exists x)(Sx \wedge Mx)$ 是存在量號，因此我們從這個著手，帶進一個new name就變成 $Sa \wedge Ma$ ，既然是 $\wedge$ ，根據我們的推論規則就會得到 Sa 跟 Ma ，接下來兩個都是for all，我們就直接帶a就好。

Unit II 真值樹系統



- 由於所有的分枝都關閉，所以，論證(c)為有效論證。

m-1212 00:58:20

把a代入 $(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Px)$ ，就得到 $Ma \rightarrow \neg Pa$ ，根據推論規則可以分成 $\neg Ma$ 、 $\neg Pa$ 兩邊，左邊 $\neg Ma$ 跟上面 Ma 矛盾，所以就可以close掉。接下來要代入 $(\forall x)\neg(Sx \wedge \neg Px)$ 變成 $\neg(Sa \wedge \neg Pa)$ ，推論規則分解成 $\neg Sa$ 跟 $\neg \neg Pa$ ，最後由於所有的分枝都關閉，所以這是一個有效論證。

Unit II 真值樹系統

- (d) $(\forall x)(\neg Px \rightarrow Mx), (\exists x)(Sx \wedge Mx) \vdash (\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$

$(\forall x)(\neg Px \rightarrow Mx)$

$(\exists x)(Sx \wedge Mx)$

$\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$

|

$(\forall x)\neg(Sx \wedge \neg Px)$

$Sa \wedge Ma$

|

Sa

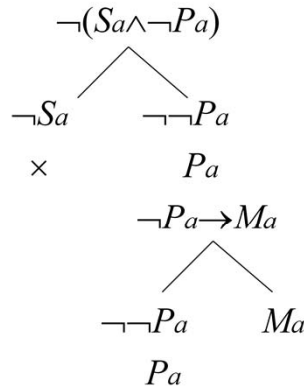
Ma

|

m-1212 01:02:25

一樣把三句寫下來 $(\forall x)(\neg Px \rightarrow Mx)$ 、 $(\exists x)(Sx \wedge Mx)$ 、 $\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$ ， $\neg$ 把它當推土機，推過去把存在量號 $\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$ 變成全稱量號 $(\forall x)\neg(Sx \wedge \neg Px)$ ，把 $(\exists x)(Sx \wedge Mx)$ 帶進new name變成 $Sa \wedge Ma$ ，然後 $Sa \wedge Ma$ 下來分解成 Sa 跟 Ma 。

Unit II 真值樹系統



- 有分枝是開放的，所以，論證(d)為無效論證。
- 反例：Domain: {a},

$\frac{Ma \quad Pa \quad Sa}{T \quad T \quad T}$
--



m-1212 01:04:16

接下來分解的是 $(\forall x)\neg(Sx \wedge \neg Px)$ ，因為是 $\forall$ ，所以當然帶所有出現過的name，就把a代入，得到 $\neg(Sa \wedge \neg Pa)$ ，然後根據推論規則可以分解成 $\neg Sa$ 跟 $\neg \neg Pa$ ，左邊 $\neg Sa$ 和上面的 Sa 產生矛盾，因此此branch可以close掉， $\neg \neg Pa$ 變成 $\neg Pa \rightarrow Ma$ ，然後變成 Pa 、 Ma ，右邊的branch是沒有矛盾的，所以是無效論證。

我們來看看那些句子是可以劃掉的，首先做到 $(\forall x)\neg(Sx \wedge \neg Px)$ ， $\neg(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$ 就可以劃掉；做到 $Sa \wedge Ma$ ， $(\exists x)(Sx \wedge \neg Px)$ 可以劃掉；做到 Sa 和 Ma 在同一個branch的時候， $Sa \wedge Ma$ 可以劃掉；做到 $\neg(Sa \wedge \neg Pa)$ 分解之後就可以把它劃掉了。

其實我們在這裡的概念跟邏輯語句是一樣的，你就把 Pa 跟 Sa 當作是一句話就好，但是當他牽扯到for all的時候就不一樣了，除非你帶完所有的東西，你才能夠確定。譬如說，期中意見調查，我要確定全班所有人都很滿意，我必須一個一個問，等到全班都問玩了才能夠確定，這件事是很困難的。

我們的abcd...有限，如果abc...用完了怎麼辦？我們可以用上標下標來處理，譬如說 a_1 、 a_2 、 a_3 ...，這樣我們就可以用很多的name。

接下來做到 Pa ， $\neg \neg Pa$ 可以劃掉；做到分解成 $\neg \neg Pa$ 跟 Ma 的時候， $\neg Pa \rightarrow Ma$ 就可以把他劃掉；然後做到 Pa 的時候， $\neg Pa$ 可以把它劃掉。如果按照我剛剛的方式劃下來，你的tree裡面只會剩下兩個東西，第一個是全稱語句，就是跟for all有關的，第二個就是像 Sa 、 Ma 、 Pa 、 $\neg Ma$ 、 $\neg Pa$...這樣的東西。

最後各位不要忘記寫Domain，如果不寫Domain會有什麼問題？如果你不寫Domain，萬一出現b，那麼你的解釋就是incomplete，所以為了complete的考慮，你必須把Domain寫出來。

Unit II 真值樹系統

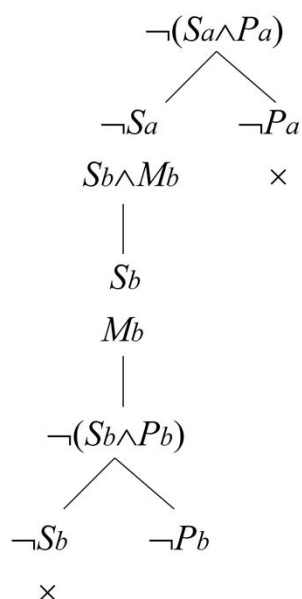
- (e) $(\exists x)(Px \wedge Mx), (\exists x)(Sx \wedge Mx) \vdash (\exists x)(Sx \wedge Px)$

$$\begin{array}{c}
 (\exists x)(Px \wedge Mx) \\
 (\exists x)(Sx \wedge Mx) \\
 \neg(\exists x)(Sx \wedge Px) \\
 | \\
 (\forall x)\neg(Sx \wedge Px) \\
 Pa \wedge Ma \\
 | \\
 Pa \\
 Ma \\
 |
 \end{array}$$

m-1212 01:20:16

第五個例子最重要的是**b**出現了，三句話都是存在量號，同樣的，我們在做root的時候把這兩個前提放在這裡，然後這個結論加上否定號，這個結論的 $\neg$ ，我們把它當作推土機推過去，就會得到 $(\forall x)\neg(Sx \wedge Mx)$ 全称量號， $Pa \wedge Ma$ 很顯然是從 $(\exists x)(Px \wedge Mx)$ 分解過來的，然後 $(\exists x)(Px \wedge Mx)$ 就可以劃掉了， $Pa \wedge Ma$ 分解得到Pa和Ma。

Unit II 真值樹系統



m-1212 01:23:00

接下來代入 $(\forall x)\neg(Sx \wedge Px)$ ，得到 $\neg(Sa \wedge Pa)$ ， $\neg(Sa \wedge Pa)$ 分解得到 $\neg Sa$ 跟 $\neg Pa$ ， $\neg Pa$ 與上面 Pa 相互矛盾，因此這個branch可以close掉，接下來要帶進 $(\exists x)(Sx \wedge Mx)$ ，因為他是存在量號，要帶一個new name給他，因此帶 b 進去得到 $Sb \wedge Mb$ ， $Sb \wedge Mb$ 下來變成 Sb 和 Mb ， Sb 跟上面的 $\neg Sa$ 是不能close掉的，所以要繼續做，因為前面有一個for all，所以就要把所有出現過的name都帶進去，所以 b 帶進去會得到 $\neg(Sb \wedge Pb)$ ， $\neg(Sb \wedge Pb)$ 下來變成 $\neg Sb$ 和 $\neg Pb$ ，左邊 $\neg Sb$ 的branch可以close掉，但是右邊 $\neg Pb$ 因為沒有產生矛盾，因此這個分枝還是一個open branch。

Unit II 真值樹系統

- 有分枝是開放的，所以，論證(e)為無效論證。
- 反例：Domain: $\{a, b\}$,

M_a	P_a	S_a	M_b	P_b	S_b
T	T	F	T	F	T
- 反例：Domain: $\{a, b\}$
- $M_x : \{a, b\}$
- $P_x : \{a\}$
- $\neg P_x : \{b\}$
- $S_x : \{b\}$
- $\neg S_x : \{a\}$

m-1212 01:30:41

有分枝是開放的，所以這個是無效論證。

事實上你在寫反例的時候應該建構一個解釋的模型，不過，也可以允許各位這樣表示，

反例：Domain: $\{a, b\}$,

M_a	P_a	S_a	M_b	P_b	S_b
T	T	F	T	F	T

事實上比較正確的寫法是這樣，反例：Domain: $\{a, b\}$ 、 $M_x : \{a, b\}$ 、 $P_x : \{a\}$ 、 $\neg P_x : \{b\}$ 、 $S_x : \{b\}$ 、 $\neg S_x : \{a\}$

Unit II 真值樹系統

● 實例說明：

- (f) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall y)(\forall x)F_{xy}$
- (g) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall x)(\forall y)F_{yx}$
- (h) $(\exists x)(\exists y)(F_{xy} \vee F_{yx}) \vdash (\exists x)(\exists y) F_{xy}$
- (i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz}), (\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx}) \vdash (\forall x)F_{xx}$
- (j) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz}), (\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx}) \vdash (\forall x)((\exists y) F_{xy} \rightarrow F_{xx})$

m-1212 01:32:26

接下來我們要來做稍稍複雜點的題目，這裡的題目都是關係述詞，各位發現我其實只有寫到二元述詞的部分。

第一個 $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall y)(\forall x)F_{xy}$ ，各位覺得對所有的x、y來講，他是有效還是無效論證？應該是有效論證，譬如說，如果每個人都愛每個人，後面那句話的意思是每個人都被每個人愛，所以他是有效論證。

第二個 $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall x)(\forall y)F_{yx}$ ，意思就是說每個都可以畫箭頭過去連結到每一個，也就是每個都被連結，是不是一樣？各位不訪想一想。

第三個 $(\exists x)(\exists y)(F_{xy} \vee F_{yx}) \vdash (\exists x)(\exists y) F_{xy}$ ，這個就要深思熟慮，看起來沒有這麼直覺了。

第四個 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz}), (\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx}) \vdash (\forall x)F_{xx}$ ，

第一個前提其實就是傳遞關係，第二個前提是對稱關係，那這兩個成立，是不是全自反關係就成立？這個我下次會做給各位看。

M-1219 00:00:00

我們上次講到有關於一元述詞真值樹系統的計算，今天我們要進入到二元以上述詞真值樹的計算，我要先提醒各為一件事，到目前為止我們會面臨到一個稍稍的難題，真值樹系統原則上他是個蠻好用的系統，我們可以證明基本上他在一元述詞情況下，我們可以找到某一個證明去證明一個論證是不是有效論證，這樣一個具有決定性的過程在一元述詞是可以辦得到的。

現在我們進入到二元述詞的時候，我們並不會存在有這樣一個決定系統，讓我們去找到這樣一個prove，也就是說，即使是在真值樹系統裡面，我們沒有辦法把它完全分解出來，所以在這種情況之下，我們並不會讓各位證明出這樣的題目。

(f) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall y)(\forall x)F_{xy}$

(g) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall x)(\forall y)F_{yx}$

(h) $(\exists x)(\exists y)(F_{xy} \vee F_{yx}) \vdash (\exists x)(\exists y) F_{xy}$

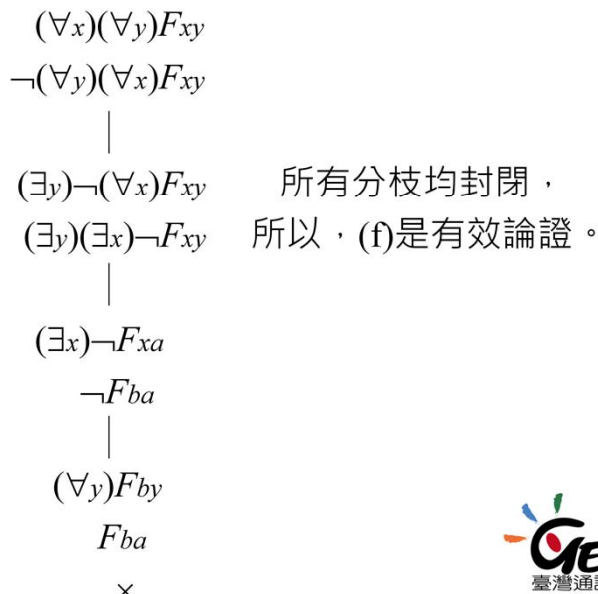
(i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz}), (\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx}) \vdash (\forall x)F_{xx}$

(j) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz}), (\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx}) \vdash (\forall x)((\exists y) F_{xy} \rightarrow F_{xx})$

這些例子我等下一一證明給各位看。

Unit 11 真值樹系統

- (f) $(\forall x)(\forall y) F_{xy} \vdash (\forall y)(\forall x)F_{xy}$

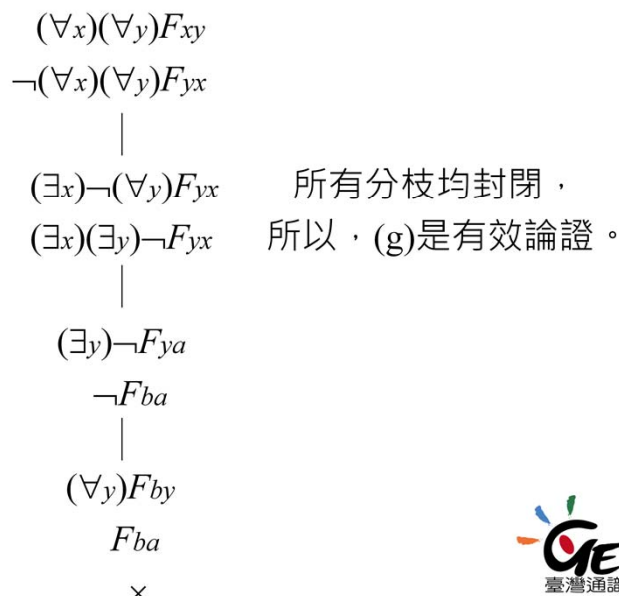


M-1219 00:06:35

首先我們來看這個 $(\forall x)(\forall y) F_{xy} \vdash (\forall y)(\forall x)F_{xy}$ ，我們寫他們root，前提先寫下來， $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$ ，再來是結論加**negation**變成 $\neg(\forall y)(\forall x)F_{xy}$ ，依照我們前面所教的規則，我們首先來看，我們這個量詞前面有**negation**，我們把它掃過去，變成 $(\exists y)\neg(\forall x)F_{xy}$ ，接下來再掃過第二個，變成 $(\exists y)(\exists x)\neg F_{xy}$ ，接下來我們要開始帶入，我們在帶的時候都是以存在量詞為優先，各位要特別注意一件事，在不同的**formula**的時候，第一個有出現全稱量詞跟存在量詞，我們當然是存在量詞優先，但是如果他在同一個**formula**裡面，如果第一個出現全稱量詞，第二個出現存在量詞，你就不可以從存在量詞先做，原因在於把全稱量詞跟存在量詞擺在前面或是後面，他的意思是不同的，所以我們先帶這個 $(\exists y)(\exists x)\neg F_{xy}$ ，變成 $(\exists x)\neg F_{xa}$ ，接下來我們這裡又有一個x是存在量詞，所以又要帶一個新的name進來，得到 $\neg F_{ba}$ ，接下來是 $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$ ，原則上我們要把它全部帶進來，但是各位可以觀察到，你不管怎麼取代，都會在同一個**branch**上面，因為都在同一個**branch**上面，基於目標導向，我們只要看哪一個會使得底下這個跟上面 $\neg F_{ba}$ 會產生矛盾的，所以我就先在x帶b，得到 $(\forall y)F_{by}$ ，最後y再帶入a，最後會得到 F_{ba} ，與上面 $\neg F_{ba}$ 產生矛盾，這個**branch**就可以close掉，所有分枝均封閉，所以論證(f)是有效論證。

Unit II 真值樹系統

- (g) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall x)(\forall y)F_{yx}$

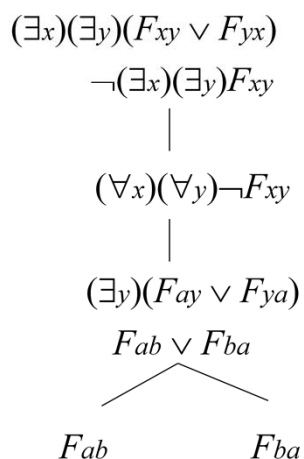


M-1219 00:16:11

第二題) $(\forall x)(\forall y)F_{xy} \vdash (\forall x)(\forall y)F_{yx}$ ，我們一樣從root開始 $(\forall x)(\forall y)F_{xy}$ 、 $\neg(\forall x)(\forall y)F_{yx}$ ，一樣把negation掃過來，得到 $(\exists x)\neg(\forall y)F_{yx}$ ，再掃一次變成 $(\exists x)(\exists y)\neg F_{yx}$ ，接下來用一個new name帶進來，得到 $(\exists y)\neg F_{ya}$ ，因為是存在量詞，所以必須再帶一個new name進來，得到 $\neg F_{ba}$ ，因為他都在同一個branch上面，我們只要看哪一個會使得底下這個跟上面 $\neg F_{ba}$ 會產生矛盾的，所以我就先在x帶b，得到 $(\forall y)F_{by}$ ，最後y再帶入a，最後會得到 F_{ba} ，與上面 $\neg F_{ba}$ 產生矛盾，這個branch就可以close掉，所有分枝均封閉，所以(g)是有效論證。
有些邏輯書上會有不同的做法。

Unit II 真值樹系統

- (h) $(\exists x)(\exists y)(F_{xy} \vee F_{yx}) \vdash (\exists x)(\exists y) F_{xy}$



M-1219 00:25:46

接下來來看這題 $(\exists x)(\exists y)(F_{xy} \vee F_{yx}) \vdash (\exists x)(\exists y) F_{xy}$ ，一樣先把root寫下來 $(\exists x)(\exists y)(F_{xy} \vee F_{yx})$ 、 $\neg(\exists x)(\exists y)F_{xy}$ ，很快地用 $\neg$ 把他掃過去，得到 $(\forall x)(\forall y)\neg F_{xy}$ ，原則上先做存在量詞 $(\exists x)(\exists y)(F_{xy} \vee F_{yx})$ ，x帶入a得到 $(\exists y)(F_{ay} \vee F_{ya})$ ，再把y帶b進來得到 $F_{ab} \vee F_{ba}$ ，因為這是一個 $\vee$ ，當然就要分成兩個branch，也就是 F_{ab} 跟 F_{ba} 在不同的分枝上。

Unit II 真值樹系統

$$\begin{array}{cc}
 (\forall y)\neg F_{ay} & (\forall y)\neg F_{ay} \\
 \neg F_{ab} & \neg F_{ab} \\
 \times & | \\
 & (\forall y)\neg F_{by} \\
 & \neg F_{ba} \\
 & \times
 \end{array}$$

- 所有分枝均封閉，論證(h)是有效論證。

M-1219 00:28:06

接下來這一步千萬要注意，因為你分成兩個branch，所以你在帶進全稱量詞的時候，兩邊都要出現，我知道有些同學思考能力很強，他會delete掉所有不需要的步驟，他就會觀察，既然這個要Fab，這個要Fba，那我在帶這個的時候，那我這個就帶Fab，這邊的就帶Fba，這樣就好了嘛，原則上你的想法一點錯都沒有，但是在show你的證明的時候這樣是不對的，因為你miss掉一些東西，你會說你miss掉的東西不會影響證明，那老師就會要你證明給我看，簡單的說你還是要把它寫出來。

所以如果你想要在x的地方帶a進來，想要在y的地方帶b進來，那這兩個同時都要帶，所以基本上我們會建議各位，在做的时候一定要把這個寫出來，寫出來之後你們會發現，左邊的branch出現了矛盾，所以這個分枝可以close掉，接下來看右邊的branch，x的位置要帶b進來 $(\forall x)(\forall y)\neg F_{xy}$ ，得到 $(\forall y)\neg F_{by}$ ，然後y的地方再帶a進來，就會得到 $\neg F_{ba}$ ，也產生矛盾，這個branch也可以close掉，所有分枝均封閉，所以這是一個有效論證。

接下來我們來看個很有趣的題目，如果傳遞性成立、對稱也成立，那他是不是全自反關係也成立。

Unit II 真值樹系統

- (i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz}), (\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx})$
 $\vdash (\forall x)F_{xx}$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz})$$

$$(\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx})$$

$$\neg(\forall x)F_{xx}$$

$$(\exists x)\neg F_{xx}$$

$$\neg F_{aa}$$

$$(\forall y)(F_{ay} \rightarrow F_{ya})$$

$$(F_{aa} \rightarrow F_{aa})$$

$$\neg F_{aa}$$

$$F_{aa}$$

×

M-1219 00:34:33

首先我們一樣來看root，

第一個 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz})$ 是傳遞關係，

第二個 $(\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx})$ 是對稱關係，

第三個 $(\forall x)F_{xx}$ 是全自反關係，當然把 $\neg$ 放在底下變成 $\neg(\forall x)F_{xx}$ ，

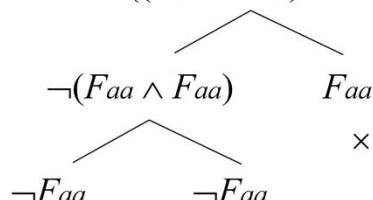
首先當然先把 $\neg$ 掃過去變成 $(\exists x)\neg F_{xx}$ ，帶進a得到 $\neg F_{aa}$ ，接下來從第二個開始帶 $(\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx})$ ，這個的話我們要帶 F_{aa} ，我們的目標是要得到矛盾，到目前為止我們只有一個a而已，所以我們全部都帶a進去，這個x先帶a進來變成 $(\forall y)(F_{ay} \rightarrow F_{ya})$ ，你再把Y帶a進來就會變成 $(F_{aa} \rightarrow F_{aa})$ ，如果我們用條件號的分解規則，就會得到兩個branch $\neg F_{aa}$ 、 F_{aa} ， F_{aa} 產生矛盾，因此可以close掉，接下來是 $\neg F_{aa}$ 。

Unit II 真值樹系統

$$(\forall y)(\forall z)((F_{ay} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{az})$$

$$(\forall z)((F_{aa} \wedge F_{az}) \rightarrow F_{az})$$

$$((F_{aa} \wedge F_{aa}) \rightarrow F_{aa})$$



- 有分枝未封閉，所以論證(i)是無效論證。
- 反例：Domain: {a} $\neg F_{xx}: \{(a, a)\}$ $\neg F_{xy}: \{(a, a)\}$
 $F_{yz}: \{(a, a)\}$ $F_{xz}: \{(a, a)\}$
 $F_{yx}: \{(a, a)\}$



M-1219 00:37:11

各位千萬要記得，即使你帶完，你也不可以把全稱量號的語句劃掉，因為後面可能還會再出現新的符號，所以我們來看，接下來這個因為都是for all，所以很顯然我們只要帶a進來 $(\forall y)(\forall z)((F_{ay} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{az})$ 就可以了，最後就會得到 $((F_{aa} \wedge F_{aa}) \rightarrow F_{aa})$ ，分解得到 $\neg(F_{aa} \wedge F_{aa})$ 、 F_{aa} ， F_{aa} 產生矛盾可以close掉，另外一邊 $\neg(F_{aa} \wedge F_{aa})$ 分解得到 $\neg F_{aa}$ 、 $\neg F_{aa}$ ，有分枝未封閉，所以這是一個無效論證。

接下來要寫反例，首先要先寫Domain，各位來看第一個branch， $\neg F_{aa}$ 是第一個，再下來是 $\neg F_{aa}$ ，再下來這個 $\neg F_{aa}$ ，這個是一個open branch，可是各位告訴我這裡面只出現了哪些formula，第一個 $\neg F_{aa}$ 是從 F_{xx} 帶出來的，第二個 $\neg F_{aa}$ 是從他的前件 F_{xy} 帶出來的，最底下的 $\neg F_{aa}$ 是從這個 F_{xy} 來的，所以各位告訴我這個branch裡面沒有出現什麼？ F_{yx} 、 F_{xz} 、 F_{yz} 這些都沒有出現，所以當你在寫反例的時候會有個有趣的情形，這個反例就只有兩個， $\neg F_{xx}: \{(a, a)\}$ 、 $\neg F_{xy}: \{(a, a)\}$ ， $\neg F_{xx}: \{(a, a)\}$ 這個表示說這是一個ordered pair，這個ordered pair我們把他帶進去，這個 (x, x) 我們帶 (a, a) 進來，他是為假的，這個意思就是說 (a, a) 這對pair滿足 $\neg F_{xx}$ 這個formula，第二個我們可以寫，這個 (a, a) 也滿足 $\neg F_{xy}$ ，表示他也滿足 $\neg F_{xy}$ 這樣一個式子，可是另外三個都沒有對不對，我們講過如果沒有的話，那在這個model裡面interpretation不是可以隨意給嗎？可是如果這樣給會很奇怪，我給各位看一下，如果你把他給成說 F_{yz} 是 (a, a) ， F_{xz} 是 (a, a) ， F_{yx} 是 (a, a) ，會有什麼問題？這個最大的問題就是說，我們現在Domain裡面只有一個東西，可是這個東西我們照這樣給interpretation的話，會出現一個很麻煩的情況，在第一個情況 F_{xx} 裡面，他是告訴我說這個東西跟這個東西不會有f的關係，可是在底下的 F_{yz} 會變成說，如果我把他當成y、z，你這樣畫回來是不是就會自己跟自己有這個關係？所以你這個解釋的麻煩之處在於，你同時要告訴我他跟自己沒有這個關係，他跟自己又沒有這個關係，這個不可能成立，所以各位要記得在寫這個東西的時候，底下的不要寫，你只要寫黑的部分就好。

在作命題邏輯的時候，我們必須在反例的地方要寫出所有的命題邏輯符號，才會是一個完備的structure，要不然有些命題符號會有undefined的情況出現，但是在述詞邏輯不一樣，述詞邏輯要求的只有我要對這樣的formula作interpretation就好，也就是說，你只要提供這樣一個model，讓這個為假，這個為假，這就是一個counterexample，所以底下那些是不用寫的。

Unit II 真值樹系統

- (j) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz}), (\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx})$
 $\vdash (\forall x)((\exists y) F_{xy} \rightarrow F_{xx})$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz})$$

$$(\forall x)(\forall y)(F_{xy} \rightarrow F_{yx})$$

$$\neg(\forall x)((\exists y) F_{xy} \rightarrow F_{xx})$$

|

$$(\exists x)\neg((\exists y)F_{xy} \rightarrow F_{xx})$$

$$\neg((\exists y)F_{ay} \rightarrow F_{aa})$$

|

$$(\exists y)F_{ay}$$

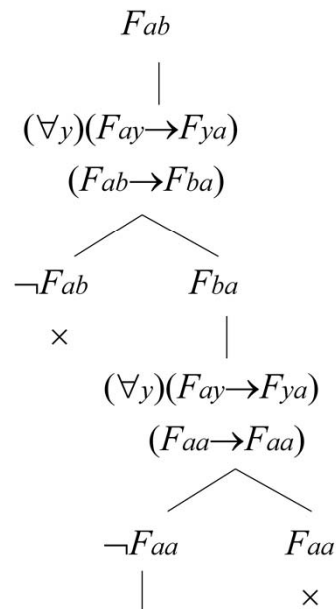
$$\neg F_{aa}$$

|

M-1219 00:48:38

最後一個題要提醒各位的是說，當我們看到連接詞的時候，我們要去決定說要怎麼分解他，他是有先後順序的，第一個語句是傳遞關係，第二個是對稱關係，最後要證明 $(\forall x)((\exists y) F_{xy} \rightarrow F_{xx})$ ，小心，這個 $\exists y$ 不是在括號的外面，而是在括號的裡面，所以他管到的範圍就只有 F_{xy} ，並沒有管到後面的 F_{xx} ，我們把他列出來最後一個式子是這樣 $\neg(\forall x)((\exists y) F_{xy} \rightarrow F_{xx})$ ，然後把negation掃過來變成 $(\exists x)\neg((\exists y)F_{xy} \rightarrow F_{xx})$ ，這邊的 $\neg$ 不可以掃過去，因為這個 $\exists y$ 是在括號裡面，所以這個時候main connective是這個 $\neg$ ，接下來裡面這個 $((\exists y)F_{ay} \rightarrow F_{aa})$ 的main connective是 $\rightarrow$ ，所以我們要用 $\neg$ 跟條件號的規則去分解他，會變成 $(\exists y)F_{ay}, \neg F_{aa}$ 。

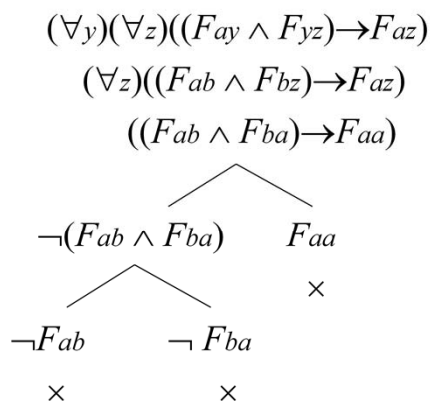
Unit II 真值樹系統



M-1219 00:51:11

那當這個做出來之後，我們再把y帶b進去，得到Fab，所以對這個來講，我們把他帶進來 $(\forall x)(\forall y)(Fxy \rightarrow Fyx)$ ，得到這個式子 $(Fab \rightarrow Fba)$ ，這個當然我們也是想要能夠盡量把這個樹縮小的這樣一個想法，所以我們盡量想辦法能夠找到跟這個有相關的，所以我們做出來發現這個 $\neg Fab$ 跟Fab產生矛盾可以close掉，另一邊是Fba，這個做出來之後，接下來我們想要再找一次，我們這個可以再帶一次Faa，把Faa帶出來，這個Faa的branch又可以close掉。

Unit II 真值樹系統



- 所有分枝均封閉，所以論證(j)是有效論證。

M-1219 00:53:58

接下來就帶 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((F_{xy} \wedge F_{yz}) \rightarrow F_{xz})$ 這個式子，記得目標導向的取代原則，在 x 出現的位置代入 a ， y 的位置代入 b ， z 的位置代入 a ，得到 $((F_{ab} \wedge F_{ba}) \rightarrow F_{aa})$ ，分解我們會得到 $\neg(F_{ab} \wedge F_{ba})$ 、 F_{aa} 兩個branch，然後 F_{aa} 又可以close掉，有問題嗎？我們再來一次，我們在做的時候其實都秉持著兩個原則，第一個原則是我們的Domain能夠盡量小就小，做到這個的方法是，我們都從存在量詞都formula開始，這樣Domain裡面的name就不會太多，第二個原則是說，當我們碰到for all的時候，理論上你應該要所有的都通通要代入，可是你也不曉得哪裡會有產生close的效果，把樹封閉起來，這個是需要一點點小技巧，這個技巧就是說，我們先觀察前面出現過什麼，然後配合你前面出現過的那些關係，來決定你後面要先帶什麼，這個小技巧可以幫助我們把那個tree做到最小。

首先我們這個掃過來是不是先出現一個存在量詞，帶進來之後我會發現說這個是一個negation，然後跟這個conditional要用分解規則，得到這個，然後帶下來之後，我們這個又有一個存在量詞，所以我們就先帶進來，帶進來之後他多了一個name b ，所以做到目前為止我們出現了兩個東西， $\neg F_{aa}$ 跟 F_{ab} ，所以我們現在目標就是，我們現在要想辦法盡可能按照這兩個出現過的去找矛盾，我們不用那麼認真的從每個變量都從 a 開始一個一個代入，像這個，因為我想要設計這個 F_{ab} ，我要設法讓它產生矛盾，所以就想辦法找到這個的negation，所以既然要想辦法找到negation，我就在 x 的地方帶 a ， y 的地方帶 b ，我就可以得到這個 $\neg F_{ab}$ ，有了這步之後，這樣子的話我們就可以得到這樣一個close tree，所以因為有 F_{ba} ，底下這個 $\neg F_{ba}$ 可以把他close掉，所有分枝均封閉，所以論證(j)是有效論證。

各位有什麼問題嗎？我再提醒各位一下，這個scope的問題一定要特別注意，假設說如果有這樣一個情況 $(\forall x)(F_x \rightarrow (\forall x)F_{xx})$ ，看起來前面這個 $(\forall x)$ 是管整個句子對不對？可是後面又出現一個 $\forall x$ 量詞，那這時候怎麼辦？他到底有沒有管到後面那個 x ？他其實沒有管到後面那個，可是這樣寫會誤以為他有管到後面那個，所以這個scope的問題其實是需要花一點時間去討論的。