

Unit 9 初階邏輯語言

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示
—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

Unit 9 初階邏輯語言

- 傳統邏輯不足之處：只能處理一元述詞的語句，不能處理關係(relation)述詞的語句。
- 以 “ $a > b$ ” 為例說明：
- (1)傳統邏輯讀法：“ a ” 具有 “ $> b$ ” 這個性質。
- (2)關係述詞讀法：“ a ” 和 “ b ” 兩個東西滿足 “ $>$ ” 這個關係。

1128a 00:27:50

a 大於 b ，會滿足 $a > b$ 。

李同學和林同學，李同學坐在林同學右邊，假設以傳統邏輯來看，你會看成是他本身有一個性質，這個性質叫做在林同學的右邊，可是我們都知道把這個性質看成是內在性質是說不通的，因為只要他換個位置，這個性質就不見了。比如說李同學皮膚是黃色的，這個才能算是他的內在性質。

傳統邏輯無法處理，除非這世界所有性質都是內在性質。基本上用關係來讀的話，我們會說 a 跟 b 會滿足這個關係，而不是 a 具有大於 b 這個性質。

Unit 9 初階邏輯語言

- 單稱語詞(singular terms)：用來表達個別東西(individual things)的語詞，以小寫字母 a 、 b 、 c表示。
- 變量(variables)：用來表達非特定對象的語詞，以小寫字母 x 、 y 、 z表示。

1128a 00:30:52

傳統邏輯把句子拆成兩部分，一邊叫主詞，一邊叫述詞，進一步，我們需要有關係的語句，這些句子必須可以容許有二位以上的述詞進來。

所以我們的語言大概分成這幾個，

第一個是單稱詞，為了避免爭議，在這裡我們通常把他當是成名詞符號。

你會看到有些邏輯書會把它寫成Individual constant，Individual constant 指涉特定的對象，比如說我用 a 來指林同學，那我說 a 過了，就是林同學過了嘛，所以它代表特定的對象。

再來是變量，變量就是用來指不特定的東西。

Unit 9 初階邏輯語言

- 述詞符號：用來表達 n 個對象之間的關係， $n \geq 1$ 。
- 一元述詞： $P_a, Q_b, R_x, T_y, \dots$
- 二元述詞： $P_{ab}, Q_{bc}, R_{xy}, T_{yz}, \dots$
- n 元述詞： $P_{a_1, a_2, \dots, a_n}$
- 注意： $P_{ab} \neq P_{ba}$

1128a 00:33:46

再來是述詞符號，他可以表示到 n 個對象，一元述詞，譬如說，「 x 是帥的」應該是一元述詞，我們可以說「林同學是帥的」，「李同學是帥的」，「孫同學是帥的」，「傅老師當然也是帥的」。

二元述詞則是必須放兩個東西進來，才能形成完整的語句。如果只放一個東西會覺得很怪，就是語句不完整的感覺。

譬如說，林同學在右邊，這句話很怪，感覺就是話沒說完的意思。應該說林同學在誰的右邊，像這種誰在誰右邊叫二元述詞。我們有 n 元述詞，我們來做個小練習，有誰知道什麼是三元述詞的？很好，誰在誰跟誰的中間嘛。

日常生活中頂多用到三元述詞，思考可以延伸到 n 元，但很少聽到會用四元以上。

注意 $P_{ab} \neq P_{ba}$ ，我們來看看這個例子，譬如說，傅老師是林同學的老師，我是 a 他是 b ，那反過來說，林同學是傅老師的老師，這兩句話雖然都對，但這兩句話是不一樣的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 量詞：用來表達量的多寡的語詞。
- 全稱量詞： $(\forall x)$ 、 $(\forall y)$ 、 $(\forall z)$
- 存在量詞： $(\exists x)$ 、 $(\exists y)$ 、 $(\exists z)$

1128a 00:39:57

再來我們看到量詞，

全稱量號 $\forall$ 就是 A 倒過來，而這個 A 就是 for all 中的 All 取第一個字母的意思，存在量詞 $\exists$ 則是存在 Exist 取第一個字母，這個符號就是 for something 的意思。

Unit 9 初階邏輯語言

- 初階邏輯語言
- (1)符號：
 - (i)名稱符號： $a, b, c, \dots$
 - (ii)變量： $x, y, z, \dots$
 - (iii) n 元述詞符號： $P, Q, R, \dots$
 - (iv)量詞： $\forall, \exists$
 - (v)連接詞： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - (vi)等同符號： $=$
 - (vii)輔助符號： $(,)$

1128a 00:40:16

初階邏輯語言，

包括了符號和形構規則。

我們需要的符號包括了名稱符號、變量、 n 元述詞符號、量詞、連接詞、等同符號和輔助符號。

在述詞邏輯系統裡面，等同符號並不是必要的，

所以在有些邏輯系統裡面會沒有等同符號的出現，那也是OK的。

Unit 9 初階邏輯語言

- (2)形構規則：分成(a)原子句式(atomic formulae)以及(b)複合句式(compound formulae)
- (a)原子句式
 - (i)以等同符號連接兩個名稱符號的句式，例如 $a = b$ 。
 - (ii)如果 P 是 n 元述詞，則 $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 為原子句式。

1128a 00:41:52

形構規則分成兩個原子語句和複合語句。

原子語句基本上就是，

第一個就是等同號，譬如說 $a=b$ 。

再來， P 如果是個 n 元述詞，就表示 $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 為原子語句。

Unit 9 初階邏輯語言

- (b) 複合語句：
 - (i) 如果 ϕ 是一個句式，那麼 $\neg\phi$ 也是句式。
 - (ii) 如果 ϕ 和 ψ 都是句式，那麼 $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ 也都是句式。
 - (iii) 如果 ϕ 是一個句式，那麼 $(\forall x)\phi(x)$ 和 $(\exists x)\phi(x)$ 也是句式。
 - (iv) 除了經由規則(a)和規則(b)建構的句式之外，沒有其他句式。

1128a 00:42:30

接下來是複合語句，我們來看第三個，如果如果 ϕ 是一個句式，那麼 $(\forall x)\phi(x)$ 和 $(\exists x)\phi(x)$ 也是句式。

當然這裡面會有很多的討論，我們在這門課沒辦法給各位做詳細的討論，舉個例子，假設我們前面用了 $\forall x$ ，後面的句子裡面卻沒有任何 x 的變量，那這個我們就會說他是多餘的。

或者後面有 x ，前面沒有 $\forall x$ 或 $\exists x$ ，就代表他沒有被任何的量詞所綁住。

在這門課裡所學的語句，為了方便起見，我把多餘的討論都去掉了。

再來，除了規則(a)跟(b)之外就沒有其他的 formula，這是我們的一個規定。

Unit 9 初階邏輯語言

- 句式實例說明：
- 以 a 代表蘇格拉底， P_x 代表 x 是哲學家，則 P_a 代表蘇格拉底是哲學家。
- 以 P_x 代表 x 是哲學家，則 $(\forall x)P_x$ 是指所有的 x 都是哲學家。
- 以 P_x 代表 x 是哲學家，則 $(\exists x)P_x$ 是指有些 x 是哲學家。

1128b 00:00:00

如果 a 代表蘇格拉底， P_x 代表 x 是哲學家，那 P_a 就代表蘇格拉底是哲學家。
再來是 P_x 代表 x 是哲學家，則 $(\forall x)P_x$ 是指所有的 x 都是哲學家。
第三個， P_x 代表 x 是哲學家，則 $(\exists x)P_x$ 是指有些 x 是哲學家。

Unit 9 初階邏輯語言

- 如果以 a 代表蘇格拉底， b 代表柏拉圖， P_{xy} 代表 x 是 y 的老師。那麼， P_{ab} 代表 a 是 b 的老師。
- 如果以 P_{xy} 代表 x 是 y 的老師，則 $(\forall x)(\forall y)P_{xy}$ 代表所有的 x 都是任意 y 的老師。 $(\exists x)(\exists y)P_{xy}$ 代表有些 x 是有些 y 的老師。

1128b 00:01:05

接下來來看邏輯語言，

如果以 a 代表蘇格拉底， b 代表柏拉圖， P_{xy} 代表 x 是 y 的老師，那 P_{ab} 就代表 a 是 b 的老師。

如果以 P_{xy} 代表 x 是 y 的老師，則 $(\forall x)(\forall y)P_{xy}$ 代表所有的 x 都是任意 y 的老師。

如果以 P_{xy} 代表 x 是 y 的老師，則 $(\exists x)(\exists y)P_{xy}$ 代表有些 x 是有些 y 的老師。

Unit 9 初階邏輯語言

- $(\forall x)(\exists y)P_{xy}$ 代表任何 x 都是一些 y 的老師。 $(\exists y)(\forall x)P_{xy}$ 代表對某些 y 而言，所有的 x 都是 y 的老師。
- $(\exists x)(\forall y)P_{xy}$ 代表有些 x 是所有 y 的老師。 $(\forall y)(\exists x)P_{xy}$ 代表對所有的 y 而言，都有一些 x 是 y 的老師。

1128b 00:02:10

各位要小心，如果量詞位置不一樣，句子的意思也不一樣。

$(\forall x)(\exists y)P_{xy}$ 表示任何 x 都是某些 y 的老師。如果把 $(\exists y)$ 放前面， $(\exists y)(\forall x)P_{xy}$ 代表對某些 y 而言，所有的 x 都是 y 的老師。

各位可以告訴我這兩句話的差別嗎？邱同學請說，差很多？太好了。

可以請你說說嗎？好她的意思是，第一個的意思說，所有 x 都是某些 y 的老師，也就是說，各位都是某些人的老師，以我們四個人做標準，我是孫同學的老師，孫同學是李同學的老師，李同學是林同學的老師，林同學是傅老師的老師，所以對我們來講所有的人都是某些人的老師。

第二句，他講得很好，有個人去修某個老師的課，唯一可以確定的是，所有人都是他的老師。再來這兩句話呢？

$(\exists x)(\forall y)P_{xy}$ 代表有些 x 是所有 y 的老師。

$(\forall y)(\exists x)P_{xy}$ 代表對所有的 y 而言，都有一些 x 是 y 的老師。

這兩句話差別在哪裡？跟剛剛一樣嘛。

假設以我們班級做為討論範圍的話，我說有這樣一個人他是所有人的老師，這就符合第一句話的意思。第二句話的情況是，當我走出這個教室之後，沒有那樣一個人是所有人的老師了，所以對所有人來講，只要他有老師這樣就OK，並不一定要是同一個人。

當他出現有全稱量詞、存在量詞的時候，他語法表達的內容就完全不一樣了。

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- A 句型：所有的人都是理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\forall x)(M_x \rightarrow R_x)$$

1128b 00:10:47

接下來我們來看一元述詞的翻譯，

第一個我告訴你，所有的人都是理性的，

那我們就要先寫這樣，

譬如說 M_x ： x 是人， R_x ： x 是理性的，那所有的人就是 $\forall x$ ，

所以就是 $(\forall x)(M_x \rightarrow R_x)$ 。

各位會不會疑惑為什麼這邊要用conditional？

因為他是充分條件，所以他要先滿足人的條件，才去決定他是有理性的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- E 句型：所有的人都不是理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x)$$

1128b 00:12:40

那E語句：所有人都不是理性的。
那當然加個negation就好，
所以如果 M_x ： x 是人， R_x ： x 是理性的，
就會得到 $(\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x)$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- *I*句型：有些人是理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\exists x)(M_x \wedge R_x)$$

1128b 00:12:55

*I*句型：有些人是理性的。

那我們就翻譯成這樣，

對某些人來講，他既是人又是有理性的，

所以就會得到 $(\exists x)(M_x \wedge R_x)$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 一元述詞的翻譯：
- *O*句型：有些人是不理性的。
- M_x ： x 是人。
- R_x ： x 是理性的。

$$(\exists x)(M_x \wedge \neg R_x)$$

1128b 00:13:18

*O*句型：有些人是不理性的。

對某些人來講， x 是人，且 x 是不理性的，
所以就可以寫成 $(\exists x)(M_x \wedge \neg R_x)$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 由於 A 句型與 O 句型是矛盾的，因此 A 句型的否定和 O 句型是等值的。

$$(QN) \vdash \neg(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$$

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x)(M_x \rightarrow R_x) \\ \leftrightarrow & (\exists x)\neg(M_x \rightarrow R_x) && (\text{by QN}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)\neg(\neg M_x \vee R_x) && (\text{Impl}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)(\neg\neg M_x \wedge \neg R_x) && (\text{DeM}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)(M_x \wedge \neg R_x) && (\text{DN}) \end{aligned}$$



1128b 00:13:34

我們說過由於 A 句型與 O 句型是矛盾的，因此 A 句型的否定和 O 句型是等值的， $(QN) \vdash \neg(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$ ，這兩個句子是等值的。

簡單的判斷方式是說，你就把這個 $\neg$ 讓他秋風掃落葉掃過去，這個 $\forall$ 就會變成 $\exists$ ，反過來說，如果是 $\exists$ 就會變成 $\forall$ 。

接下來這個是證明，

如果我把 A 句型加否定 $\neg(\forall x)(M_x \rightarrow R_x)$ ，然後去做推論，你會發現

$$\begin{aligned} \leftrightarrow & (\exists x)\neg(M_x \rightarrow R_x) && (\text{by QN}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)\neg(\neg M_x \vee R_x) && (\text{Impl}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)(\neg\neg M_x \wedge \neg R_x) && (\text{DeM}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)(M_x \wedge \neg R_x) && (\text{DN}) \end{aligned}$$

因此 A 句型的否定和 O 句型是等值的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 反之， O 句型的否定和 A 句型也是等值的。

$$(QN) \vdash \neg(\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$$

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)(M_x \wedge \neg R_x) \\ \leftrightarrow & (\forall x)\neg(M_x \wedge \neg R_x) && (\text{by QN}) \\ \leftrightarrow & (\forall x)(\neg M_x \vee \neg\neg R_x) && (\text{DeM}) \\ \leftrightarrow & (\forall x)(\neg M_x \vee R_x) && (\text{DN}) \\ \leftrightarrow & (\forall x)(M_x \rightarrow R_x) && (\text{Impl}) \end{aligned}$$

1128b 00:15:54

再來這個是進一步的練習，
我們去證明 O 句型的否定和 A 句型也是等值的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 由於 E 句型與 I 句型是矛盾的，因此 E 句型的否定和 I 句型是等值的。

$$(QN) \vdash \neg(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$$

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x) \\ \leftrightarrow & (\exists x)\neg(M_x \rightarrow \neg R_x) && (\text{by QN}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)\neg(\neg M_x \vee \neg R_x) && (\text{Impl}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)(\neg\neg M_x \wedge \neg\neg R_x) && (\text{DeM}) \\ \leftrightarrow & (\exists x)(M_x \wedge R_x) && (\text{DN}) \end{aligned}$$

1128b 00:16:09

這個E語句跟I語句也是一樣的證明，
 E 句型的否定和 I 句型是等值的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 反之， I 句型的否定和 E 句型也是等值的。

$$(QN) \vdash \neg(\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$$

$$\neg(\exists x)(M_x \wedge R_x)$$

$$\leftrightarrow (\forall x)\neg(M_x \wedge R_x) \quad (\text{by QN})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(\neg M_x \vee \neg R_x) \quad (\text{DeM})$$

$$\leftrightarrow (\forall x)(M_x \rightarrow \neg R_x) \quad (\text{Impl})$$

1128b 00:16:29

再來是 I 句型的否定和 E 句型也是等值的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 對稱關係(symmetrical)：
- 當 x 對 y 滿足關係 R 時， y 對 x 也滿足關係 R ，則關係 R 是對稱的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$$

1128b 00:16:38

什麼叫對稱關係，如果 x 對 y 滿足關係 R 時， y 對 x 也滿足關係 R ，則關係 R 是對稱的。各位想想什麼關係是對稱的，最簡單的就是等於嘛， a 如果等於 b ， b 就會等於 a 。

那我們一般有什麼關係是對稱的？同學是吧，你是我的同學我就是你的同學，親戚是不是？兄弟姊妹是不是，兄弟和姊妹不一定吧，但兄弟姊妹是，那朋友是不是？不一定嘛，你把我當朋友，我不一定嘛。

所以對稱關係是這樣，如果 x 等於 y ，那 y 也等於 x 。
那麼它的式子是這樣， $(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反對稱關係(asymmetrical)：
- 當 x 對 y 滿足關係 R 時， y 對 x 必不滿足關係 R ，則關係 R 是反對稱的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow \neg R_{yx})$$

1128b 00:20:10

什麼是反對稱，如果 x 對 y 這個關係成立，那麼 y 對 x 一定不成立。
譬如說父親， a 如果是 b 的父親，那 b 就一定不會是 a 的父親。
所以反對稱的formula就是 $(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow \neg R_{yx})$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非對稱關係(nonsymmetrical)：
- 當某個關係 R 既非對稱關係，亦非反對稱關係，則關係 R 是非對稱的。

1128b 00:21:40

再來是非對稱關係。

如果對稱關係不成立，反對稱關係也不成立，那這個關係就是非對稱關係。

譬如說朋友就是，你把一個人當朋友，但他不一定會把你當朋友，這就是非對稱關係。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 傳遞關係(transitive)：
- 在 x 對 y 滿足關係 R ，而且 y 對 z 也滿足關係 R 的情況下， x 對 z 同時滿足關係 R ，則關係 R 是傳遞的。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$$



1128b 00:23:16

接下來是傳遞關係。

如果 x 對 y 滿足關係 R ，而且 y 對 z 也滿足關係 R 的情況下， x 對 z 同時滿足關係 R ，則關係 R 是傳遞的。

也就是說 x 到 y 畫個箭頭，再從 y 到 z 畫個箭頭，然後任意的 x 畫個箭頭到 z ，那這個關係就是傳遞關係。

譬如說大於是個傳遞關係， $4 > 3$ ， $3 > 2$ ，那一定 $4 > 2$ 。

所以我們就會得到 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反傳遞關係(intransitive)：
- 在 x 對 y 滿足關係 R ，而且 y 對 z 也滿足關係 R 的情況下， x 對 z 同時必不滿足關係 R ，則關係 R 是反傳遞的。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow \neg R_{xz})$$



1128b 00:26:33

當然也有反傳遞關係，

就是 x 跟 y 滿足關係 R ， y 跟 z 滿足關係 R ，但是 x 跟 z 一定不滿足關係 R 。

譬如說父子關係，

a 是 b 的父親， b 是 c 的父親，那 a 可以是 c 的父親嗎？一定不行嘛。

所以得到關係是這樣 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow \neg R_{xz})$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非傳遞關係(nontransitive)：
- 當某個關係 R 非傳遞關係，亦非反傳遞關係，則關係 R 是非傳遞的。

1128b 00:27:35

再來是非傳遞關係，

當某個關係 R 非傳遞關係，亦非反傳遞關係，則關係 R 是非傳遞的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 全自反關係(totally reflexive)：
- 當每個 x 均對 x 自身滿足關係 R 時，則關係 R 是全自反的。

$$(\forall x)R_{xx}$$

1128b 00:28:05

接下來是全自反關係，他其實是有兩個不同的關係，
我們先來看第一個，
當每個 x 均對 x 自身滿足關係 R 時，則關係 R 是全自反的。
所以我們以這樣表示 $(\forall x)R_{xx}$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 自反關係(reflexive)：
- 當 x 對 y 滿足關係 R 時，同時 x 和 y 對其自身均滿足關係 R ，則關係 R 是自反的。

$$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow (R_{xx} \wedge R_{yy}))$$

1128b 00:29:31

自反關係是這樣，

當 x 對 y 滿足關係 R 時，同時 x 和 y 對其自身均滿足關係 R ，則關係 R 是自反的。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 反自反關係(irreflexive)：
- 當每個 x 均對 x 自身不滿足關係 R 時，
則關係 R 是反自反的。

$$(\forall x)\neg R_{xx}$$

1128b 00:30:28

再來是反自反關係，
就是沒有任何的圖是從自己出發，然後回到自己的，
也就是當每個 x 均對 x 自身不滿足關係 R 時，則關係 R 是反自反的。
所以關係是這樣 $(\forall x)\neg R_{xx}$ 。

Unit 9 初階邏輯語言

- 關係述詞的性質：
- 非自反關係(nonreflexive)：
- 當某個關係 R 既非自反關係，亦非反自反關係，則關係 R 是非自反的。

1128b 00:31:05

接下來是非自反關係，

當某個關係 R 既非自反關係，亦非反自反關係，則關係 R 是非自反的。
就是有些圖會回到他自身，但有些不會，這樣我們就說他是非自反關係。

這裡面到底有什麼關鍵性的東西呢？

這裡面會不會有些關係的推論？

譬如說，有一個關係是全自反且是對稱的，請問是不是一定是傳遞的呢？

或者是說，如果有個關係是反對稱且反傳遞的，那是不是一定是反自反的呢？

類似像這樣的問題，我們可以去思考各式各樣的關係，這就是我們這裡的重點。