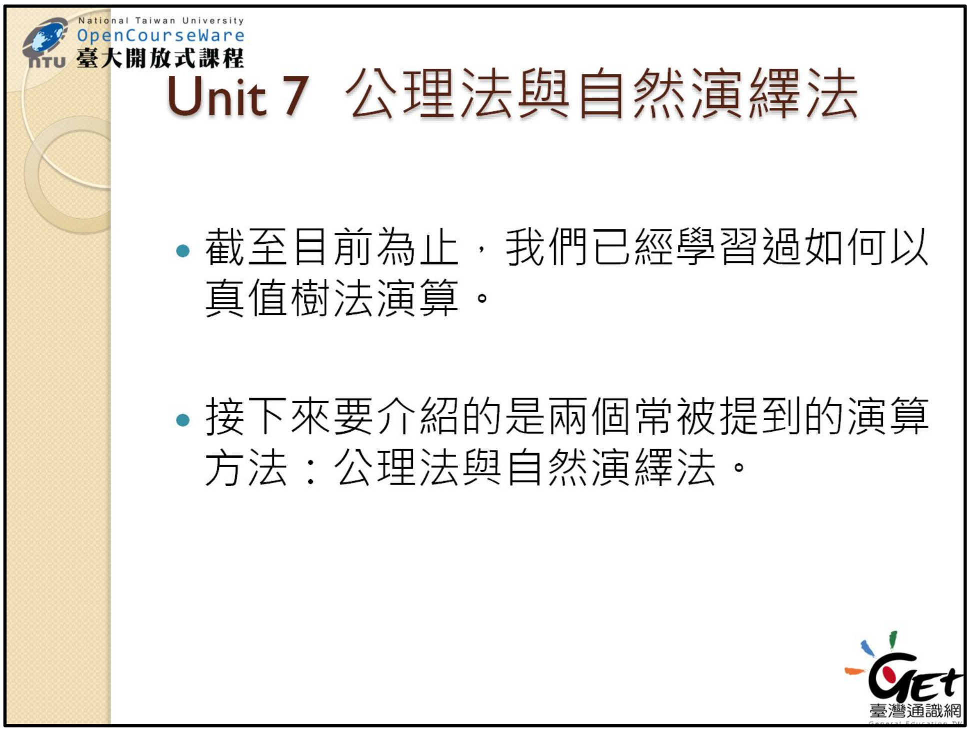
National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

Unit 7
公理法與自然演繹法

授課教師：傅皓政 老師

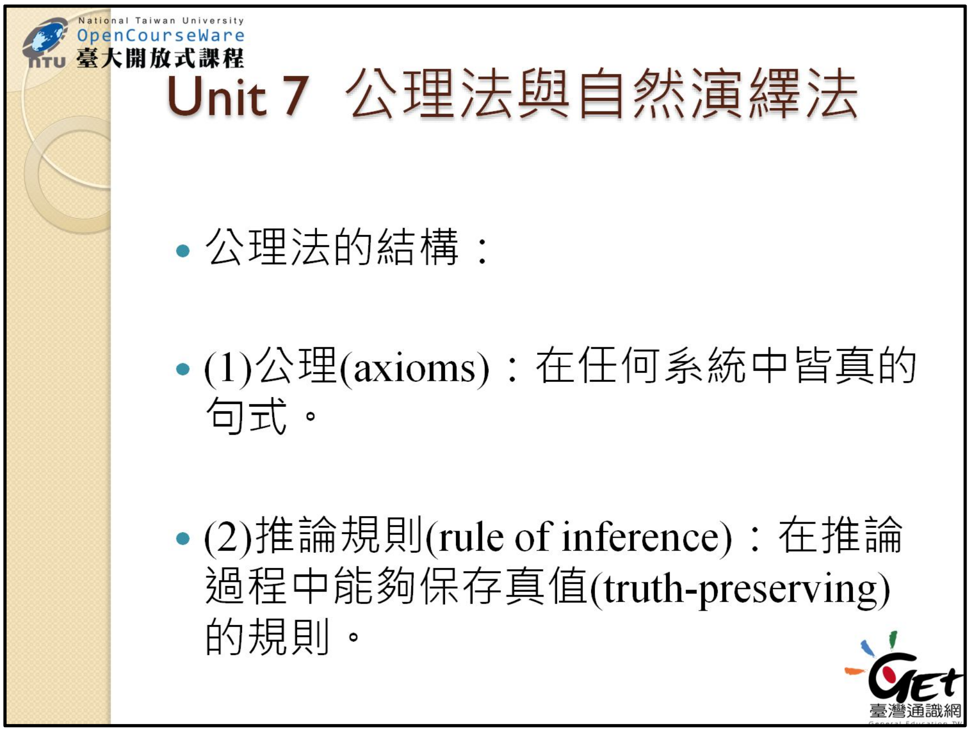
臺灣通識網



m-1107 01:15:04

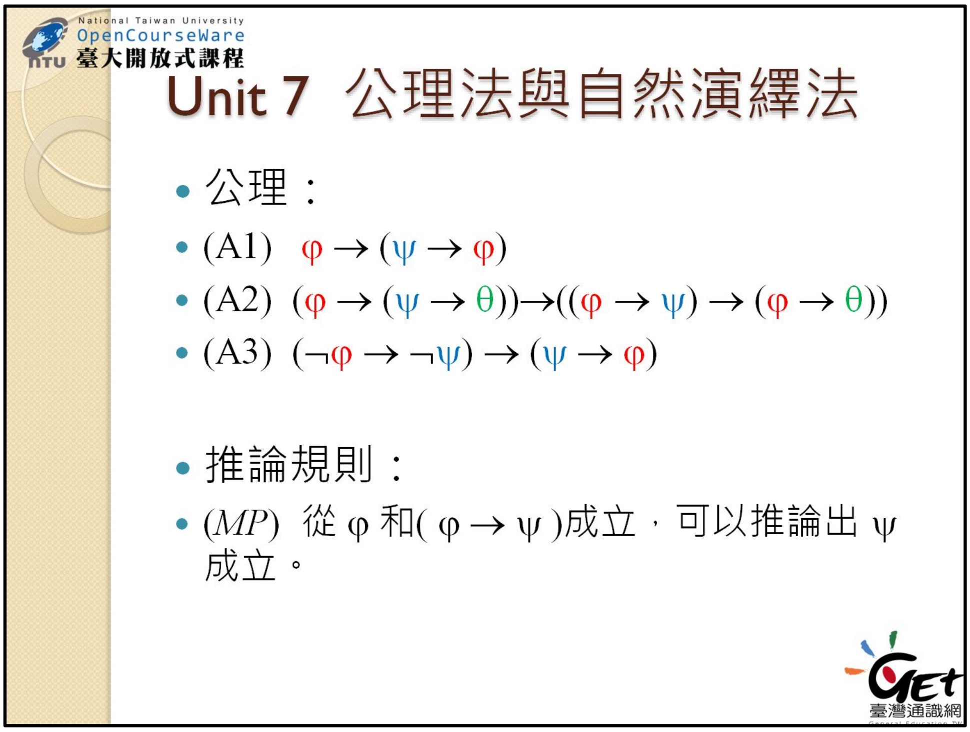
接下來我們要談到的是公理法與自然演繹法。
這個有一點點小麻煩，爲什麼？
因爲用這些方法解題需要有一點天賦，如果這個天賦你有的話，是讓我們非常羨慕和忌妒的。

到目前爲止我們知道怎麼使用真值表法和真值樹系統解題。接下來我們要來介紹公理法。



m-1107 01:16:21

公理法的結構需要兩個裝備，第一個是公理(axioms)，什麼是axiom呢？
在歐幾里得的幾何原本裡面，你會發現他通常會用什麼字眼？
他在翻譯上是有點爭議的，有些書會直接翻譯成axiom，比較新的版本大部分都會翻譯成postulate。
一開始我們所訂axiom的想法是，他在所有的系統裡面都是真的，這個我們稱爲axiom。
Postulate通常是用來指涉個別理論的預設。
當代邏輯的出現大約在19世紀末，由於非歐幾何的出現，使得當時的數學基礎搖搖欲墜，爲了替數學找到更穩固的基礎，數學家們把目光投向邏輯。
當代邏輯的創建要歸功於非常令我們敬佩的數學家Frege，他是德國耶拿大學的教授。
因爲當時數學上的危機，他開始去思考如何替數學找到一個基礎，因此他找到了邏輯，我們現在所學的邏輯系統，幾乎可以說是Frege一手建立起來的。
公理法的結構兩個，一個是公理，一個是所謂的推論規則。
當時的推論規則思考是這樣，在這個推論過程當中必須遵守真值保存(truth-preserving)的原則。



m-1107　01:20:38

接下來我們來看看公理。

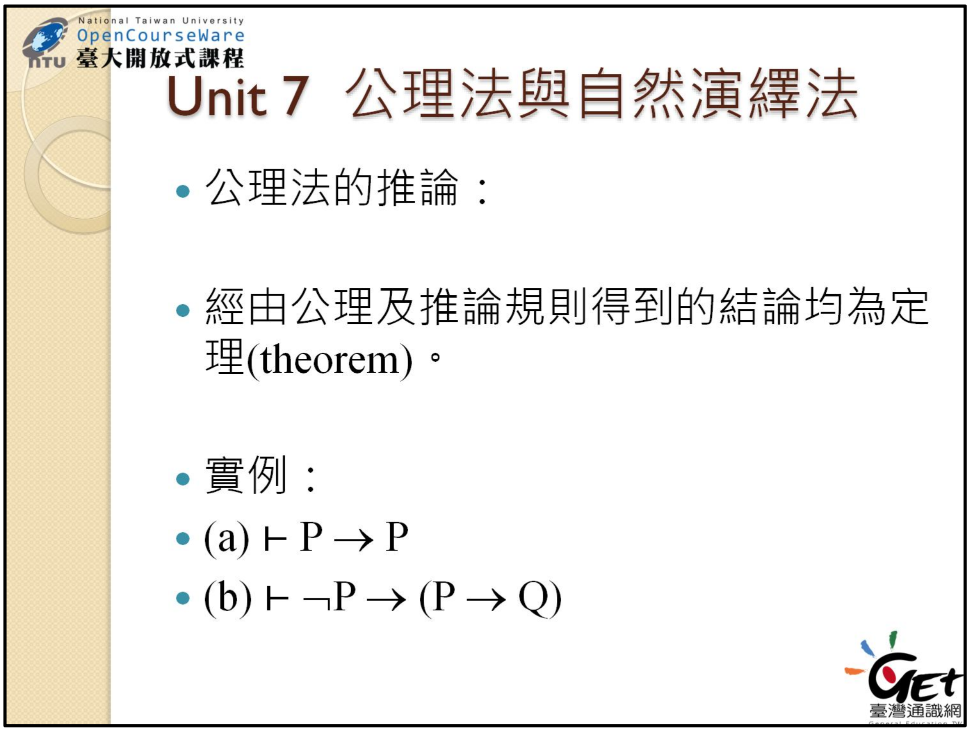
公理是這樣，各位現在看到的公理已經是很簡單的，在Frege那個時代沒有這麼簡單。我們的想法是這樣，如果可以被導出來的我們就拿掉，那些不能被導出來的我們才拿來當公理用。簡單來講，不管是預設也好、公理也好，數量當然越少越好，只要可以導出來就好嘛。
比如說，上課我講三個例子你們就懂，那還需要講到五個例子嗎？
不需要嘛，只要懂就可以了。
第二個問題有點邏輯上小麻煩，這個公理不是三個，而是無限多個，

無限的意思是說，我們這個φ、ψ、θ其實是語句的變量，或是句式的變量，也就是你可以帶任何的語句進去，所以雖然只有三個公理形式，但是公理的數量其實是無限多個。
從推論規則來看，也就是我們從如果φ和φ→ψ都成立的情況下，你可以推出ψ是成立的。
不過，因為作為推論規則的工具太少，讓我們感覺有些施展不開，無法為所欲為，現在我來讓各位看看什麼叫做無法為所欲為。

m-1107　01:23:30

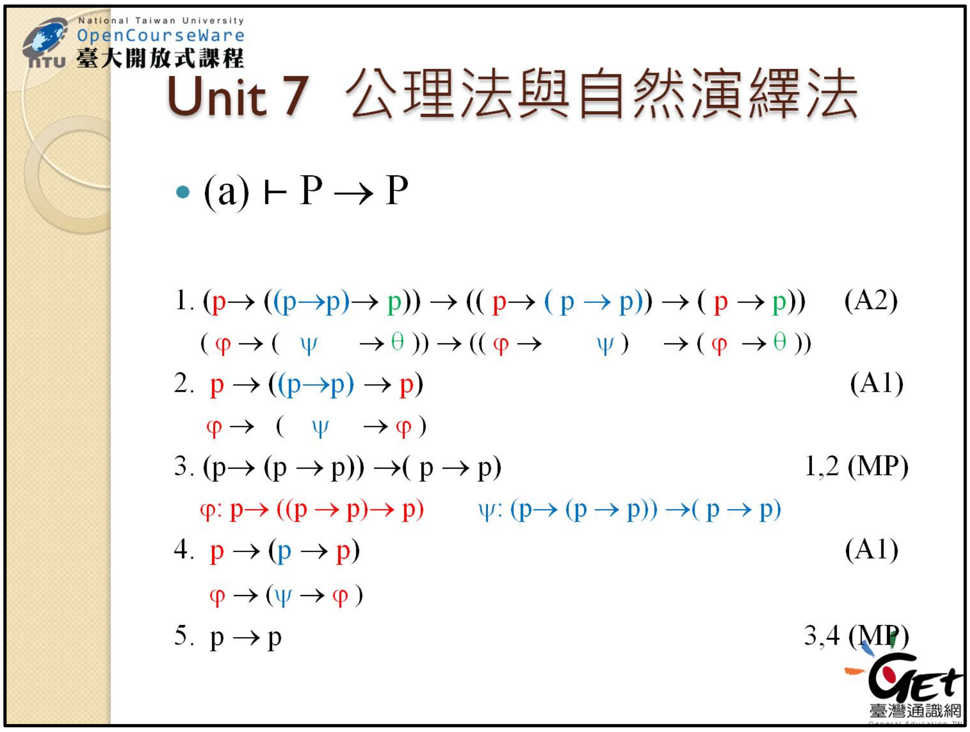
首先，公理法的推論是這樣。
第一個，所有公理的取代句是都爲真，就是我剛剛講的φ跟ψ，你只要φ都帶一樣的句子，ψ都帶一樣的句子，θ都帶一樣的句子，只要遵守這樣的原則就可以了。

比如說像這樣。
紅色就是表示φ的替代語句，藍色則代表ψ的替代語句。



m-1107　01:24:26

第二個，經由公理即推論規則得到的結論都是定理(theorem)。
接著，我們要來證明以下的語句是定理
P→P。
¬P→(P→Q)。



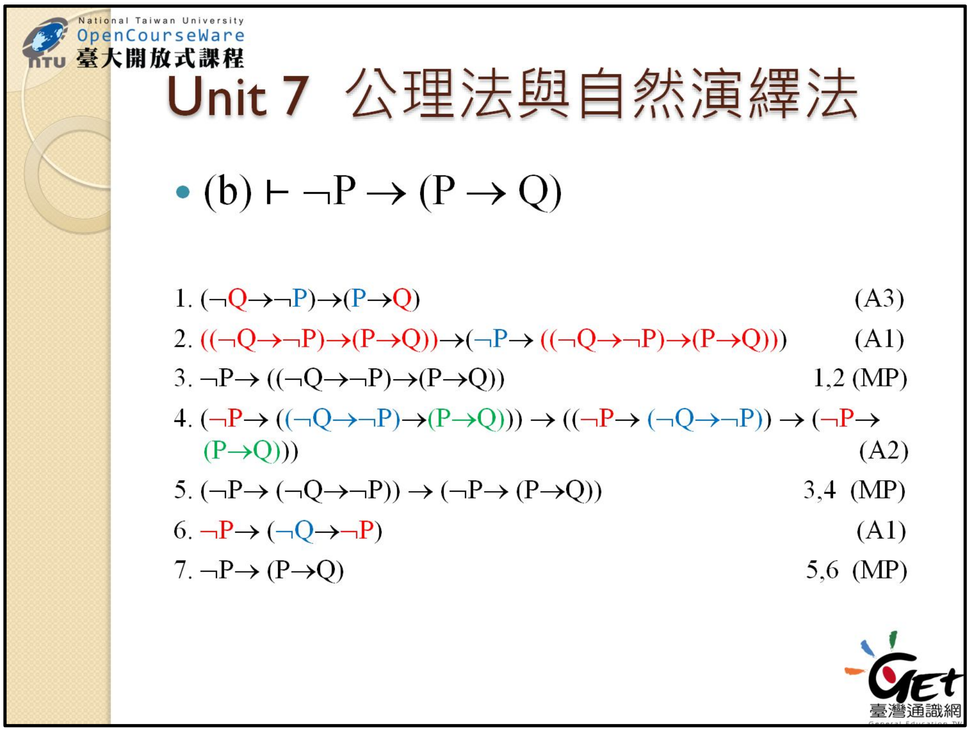
m-1107 01:24:43

這個怎麼證明？有沒有人可以根據剛剛的公理系統，很快地就知道怎麼做？他的證明是這樣。

第一步，有誰知道第一步要寫這個，知道才怪。
第二步，這個是A2底下有對照，我有幫各位做對照。
那這個是A1。那A1，φ就是P，ψ就是P→P。這個是為了導出後面這個做準備，那為什麼想要導出後面這個？因為我想要導出這個。

接下來這個是1,2MP把它做出來，前面這個看起來就比較容易了，看起來像A1的情況。

這個是A1的情況對吧？為什麼？因為φ就是P，ψ也是P。所以我們就可以證出P→P。請問這位柯同學你覺得困難在哪裡？
柯同學：「第一個假設就設不出來了。」
你的困難跟我是一樣的。你怎麼知道那是第一個？那是需要有點天分的，當然你也可以經由你的經驗來補強，也就是多練習題目，這個公理法真的是相當不容易，所以你叫老師當場解題目，老師當下也不一定解得出來。



m-1107 01:31:40

再讓各位看一下，這個怎麼證明？乍看之下有沒有很像A1？實際上是完全不一樣的。他其實要用到A3。然後再用A1，這個是最難的一步。爲什麼要這個東西呢？因爲我們只有一個規則叫做MP，所以你會發現無論你怎麼設計，他都有一個關鍵點是conditional的符號，這樣我們就可以經由MP來得到後面這個。其實我們的目的在最後面這個，這個是需要設計的，利用這個A2我們可以得到，可以得到後面這個condition，到這裡就很簡單了，這樣就看出這個是A1嘛，這個是A1你就可以推出我們所要的結論。各位有沒有看懂這樣的證明過程？
我只需要各位看懂他是這樣的式子就可以了。

Unit 7 公理法與自然演繹法

- 經過證明得到的定理，例如 $P \to P$ 等，就可以在推論過程作為前提使用。
- 實例：
- (c) $\vdash (P \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

Unit 7 公理法與自然演繹法

- (c) $\vdash (P\to(P\to Q))\to(P\to Q)$

(1) $(P\to(P\to Q)) \to ((P\to P) \to (P\to Q))$	(A2)
(2) $((P\to(P\to Q)) \to ((P\to P) \to (P\to Q))) \to$ $(((P\to(P\to Q)) \to (P\to P)) \to ((P\to(P\to Q)) \to (P\to Q)))$	(A2)
(3) $((P\to(P\to Q)) \to (P\to P)) \to ((P\to(P\to Q)) \to (P\to Q))$	1,2 (MP)
(4) $(P\to P) \to ((P\to(P\to Q)) \to (P\to P))$	(A1)
(5) $(P\to P)$	(Pr)
(6) $(P\to(P\to Q)) \to (P\to P)$	4,5 (MP)
(7) $(P\to(P\to Q)) \to (P\to Q)$	3,6 (MP)

GET 臺灣通識網

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

Unit 7 公理法與自然演繹法

- 從公理法的觀點定義論證的有效性：
- 某個論證是有效的，若且唯若，可以用公理及推論規則，從前提推論得到結論。(p.s. 如果前提是空集合，得到的結論就是上述所說的定理。)

臺灣通識網

Unit 7 公理法與自然演繹法

- 實例：
- (d) $P\ ,\ Q\rightarrow(P\rightarrow R)\ \vdash\ Q\rightarrow R$
- (e) $P\ ,\ P\rightarrow Q\ ,\ Q\rightarrow R \vdash \neg S\rightarrow R$

Unit 7 公理法與自然演繹法

- (d) $P, Q \to (P \to R) \vdash Q \to R$

1. P	(Pr)
2. $Q \to (P \to R)$	(Pr)
3. $P \to (Q \to P)$	(A1)
4. $Q \to P$	1,3 (MP)
5. $(Q \to (P \to R)) \to ((Q \to P) \to (Q \to R))$	(A2)
6. $(Q \to P) \to (Q \to R)$	2,5 (MP)
7. $(Q \to R)$	4,6 (MP)

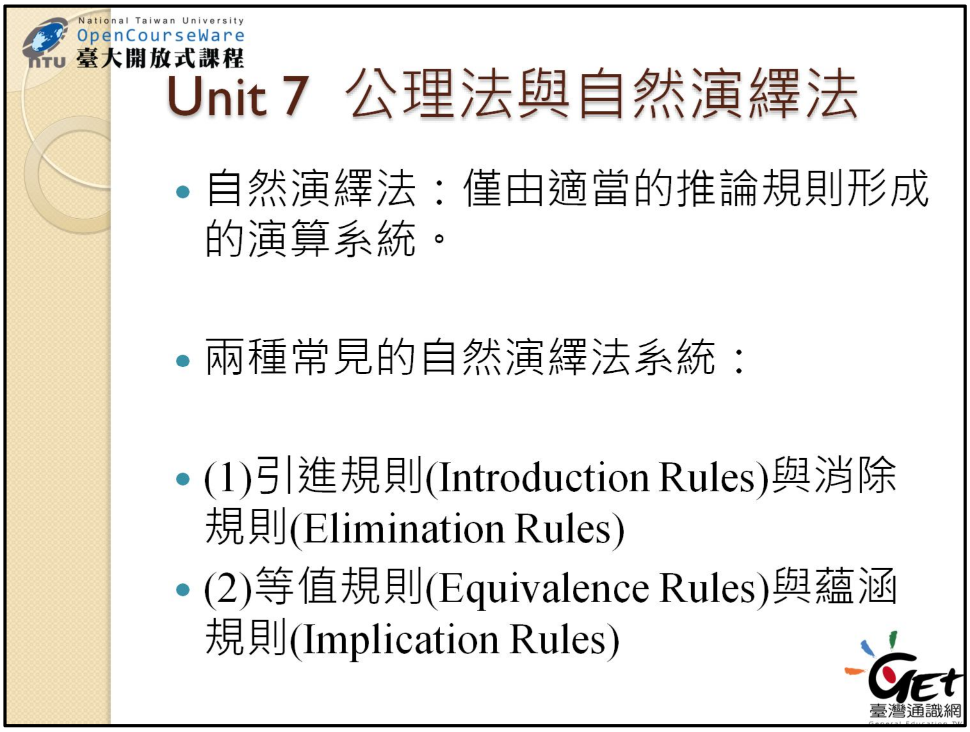
National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

Unit 7 公理法與自然演繹法

- (e) P , $P \to Q$, $Q \to R \vdash \neg S \to R$

1. P	(Pr)
2. $P \to Q$	(Pr)
3. $Q \to R$	(Pr)
4. Q	1,2 (MP)
5. R	3,4 (MP)
6. $R \to (\neg S \to R)$	(A1)
7. $\neg S \to R$	5,6 (MP)

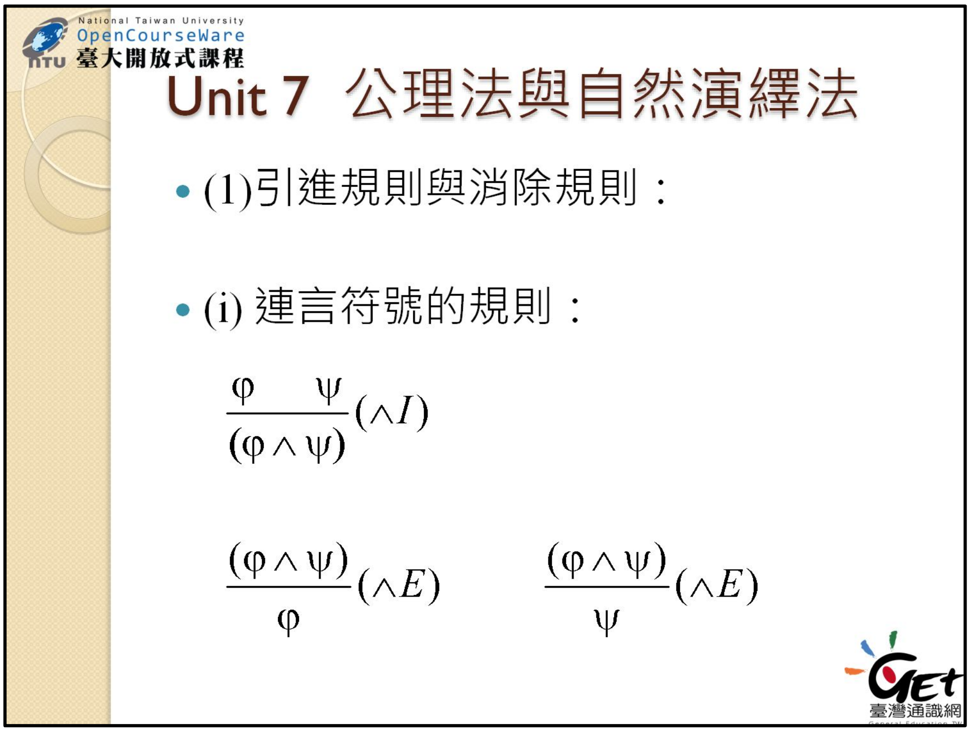
GET 臺灣通識網



m-1121　00:00:00

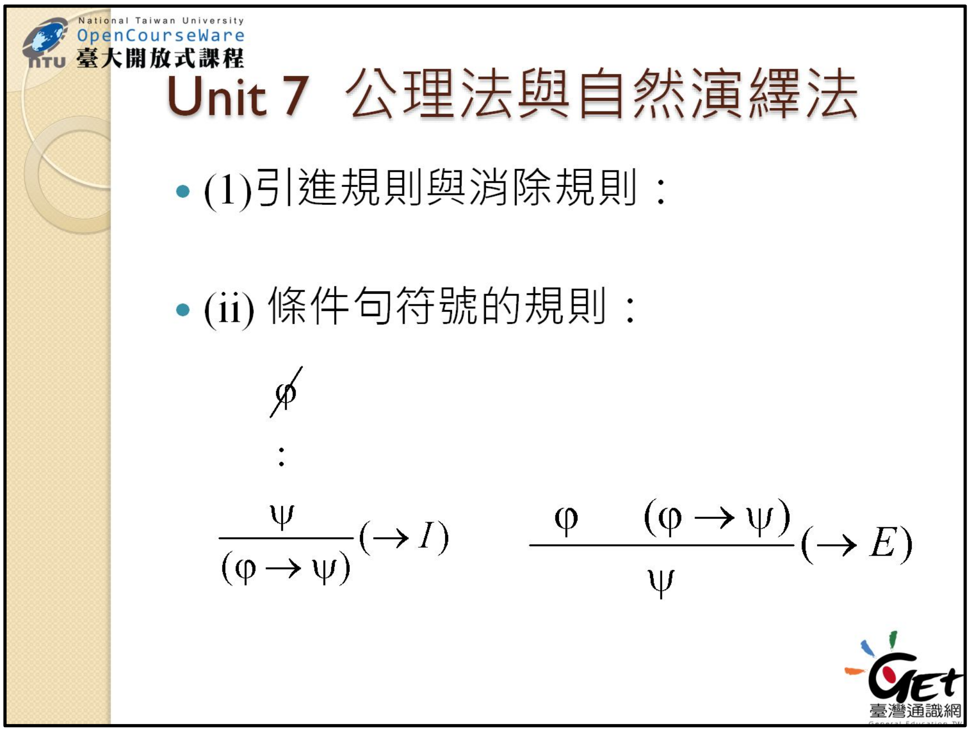
今天我們要來談自然演繹法，包括兩種基本常見的自然演繹法，第一種是引進規則，第二種是消除規則。自然演繹法的構想大概是這樣，如果我們要從前提證出結論，我的想法是這樣，我們能不能夠把他從語法裡面拆解，利用拆解與組合的方式，從前提得到我要的東西。

第二類我通常把它稱爲線性的推論，基本上他運用的是等值規則與蘊涵規則，這兩個方法基本上只是演算上不一樣，但基本構想上是一樣的。



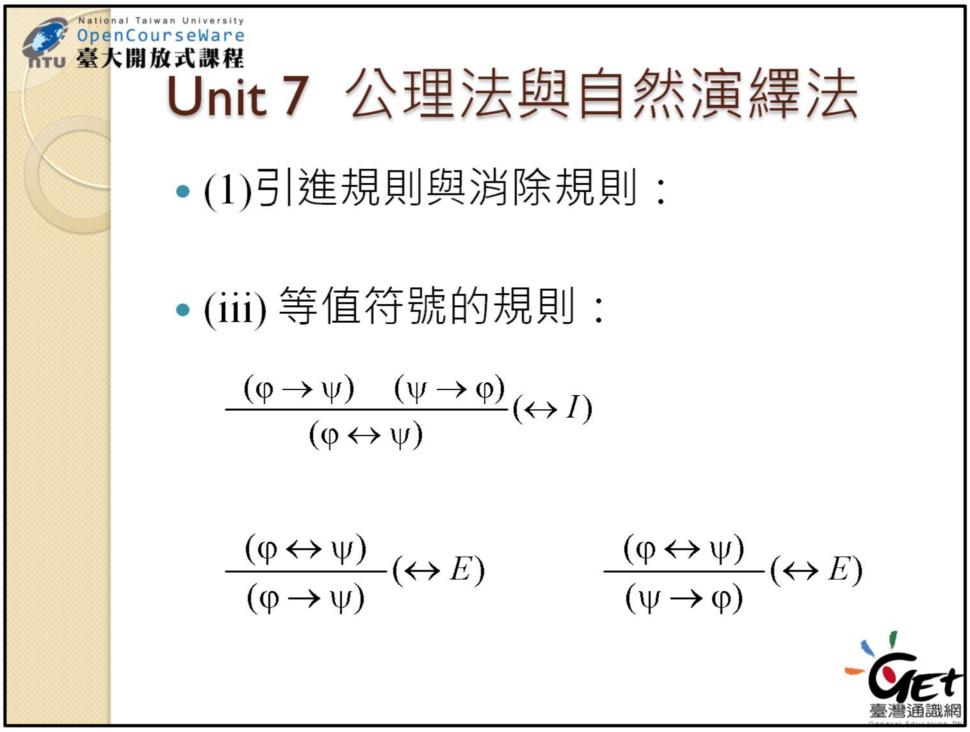
m-1121　00:03:23

首先我們來看第一類，他的規則是這樣：
我們從連言符號開始，上面這個我們稱之為Introduction rule，如果我們在推論的過程當中，從某些前提一直推…一路可以推到ϕ，那他也可以一路推到ψ，那麼這個前提就可以推出ϕ、ψ，我們可以把兩邊做一個conjunction。
你們要運用你們的想像力就是，ϕ上面可能是有一堆推論，ψ上面可能也是有一堆推論。接下來這個是消除規則，把conjunction符號去掉，拆解的時候如果遇到ϕ、ψ，可以把這個去掉變成ϕ，或者是我直接拆掉變成ψ。



m-1121　00:04:43

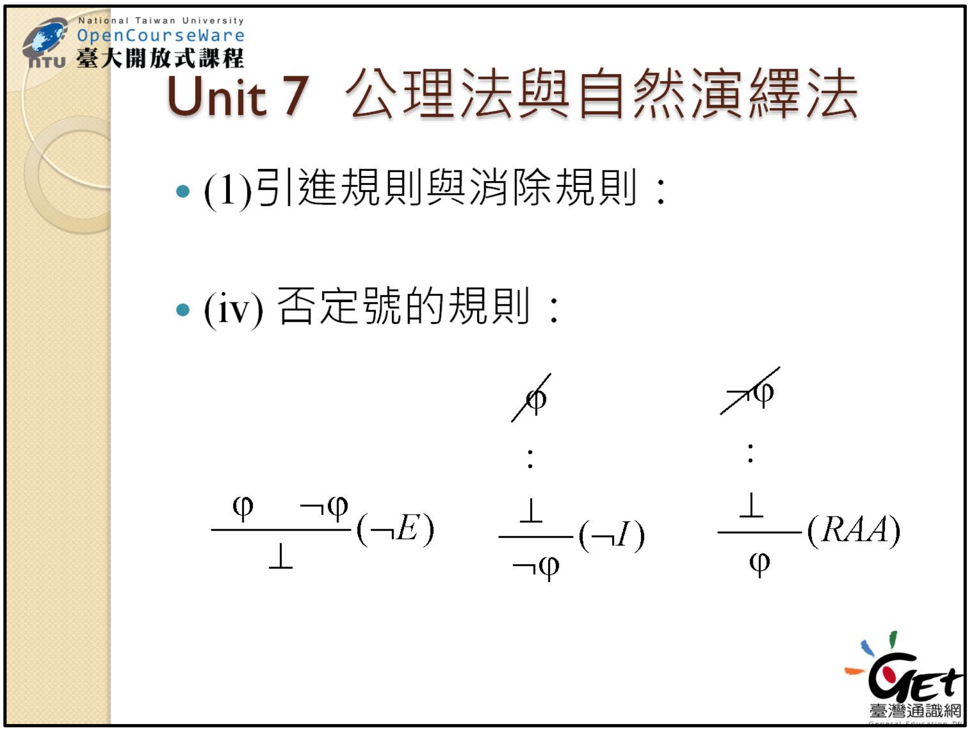
接下來我們來看條件符號，條件符號就是說，什麼時候我們要引進conditional，當我們假設這個ϕ，一路可以讓我們得到ψ，我們假設ϕ可以得到ψ，這時候我們就可以得到ϕ→ψ。
再來是他的消除規則，他就是ϕ跟ϕ→ψ可以得到ψ，這個其實就是我們在公理法系統理面講到的MP規則是一樣的。



m-1121　00:05:55

接下來是等值符號的規則，我們要想像前面可能有一堆推論，
推論最後得到ϕ→ψ這個結果，另外一邊一直推論得到ψ→ϕ的結果，然後把兩個合起來就會得到equivalence或是雙向的關係。

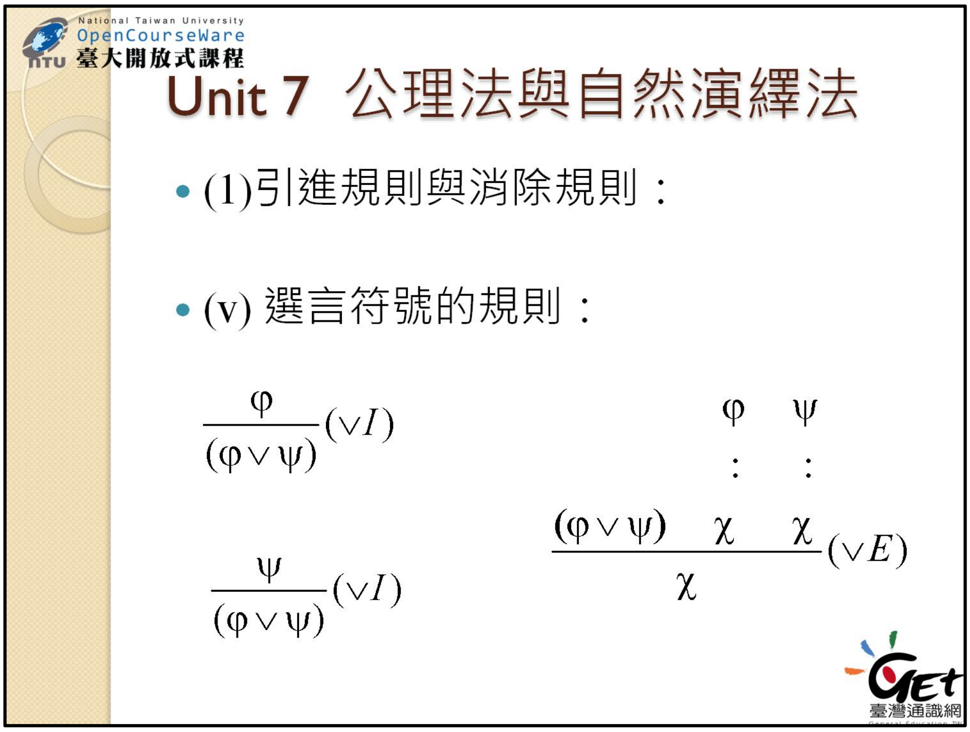
再來這個等值符號規則更簡單，既然是雙向的，它可以是ϕ→ψ，也可以是ψ→ϕ。



m-1121 00:06:43

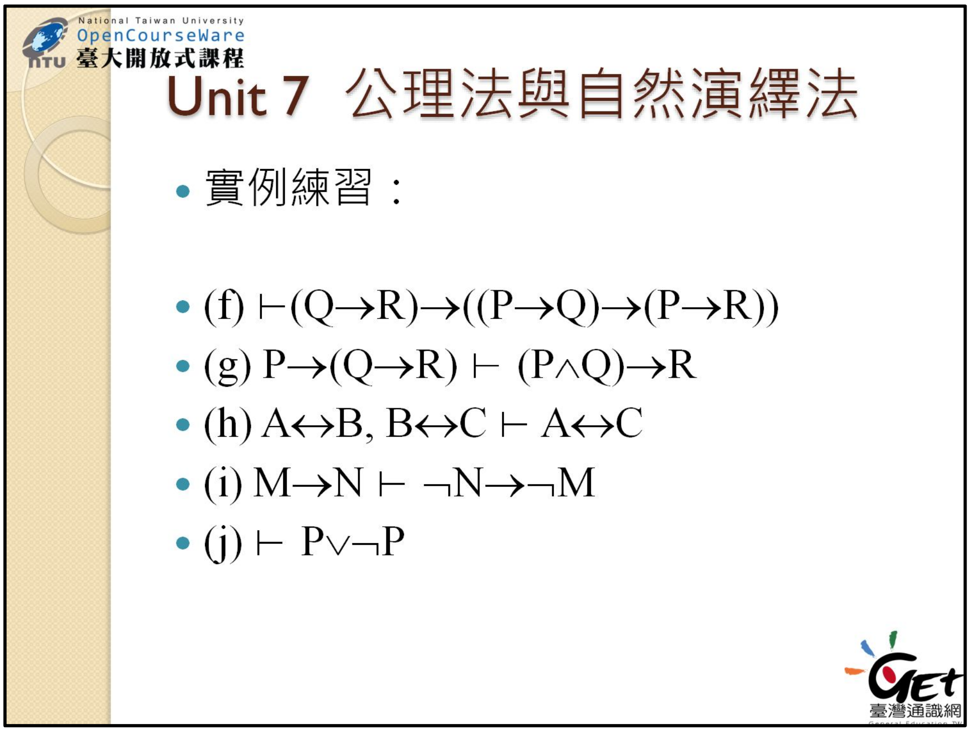
接下來否定號稍微複雜一點，我們要如何把negation放進來？
同學：用conjunction。用conjunction，所以是ϕ∧¬ϕ嗎？我們現在就是不能用到其他符號。現在negation要放進來的話，意思就是大概是什麼不成立？什麼時候我們會覺得¬ϕ成立？大概就是ϕ不成立對吧。

所以他的rule是這樣，假設ϕ一路走到矛盾，那這個¬ϕ就成立了。
特別介紹這個符號⊥，T跌倒了，T倒立了，所以⊥就是假嘛，所以我們把它稱爲Falsity，所以這個符號就是矛盾的意思。
你要如何把negation去掉呢？如果這個推論推到他，這個推論推到¬ϕ，
那ϕ跟¬ϕ不就成立了嗎？那這時候這個negation就去掉了。那你要得到negation，你要把introduction rule放進來，就是你假設ϕ一路走到falsity，那麼這個¬ϕ就成立。
另外一個RAA規則，假設¬ϕ一路推到falsity，表示¬ϕ不成立，意思就是ϕ成立，我們這個規則只適用於古典邏輯系統。
如果你以後看到的規則不是這樣，那他可能是其他系統，比如說他是個多值的邏輯系統。在古典邏輯系統裡面強調的是，¬ϕ不成立，ϕ就成立，可是在多值邏輯系統裡面就不一定，它可以是很多值的。



m-1121　00:11:47

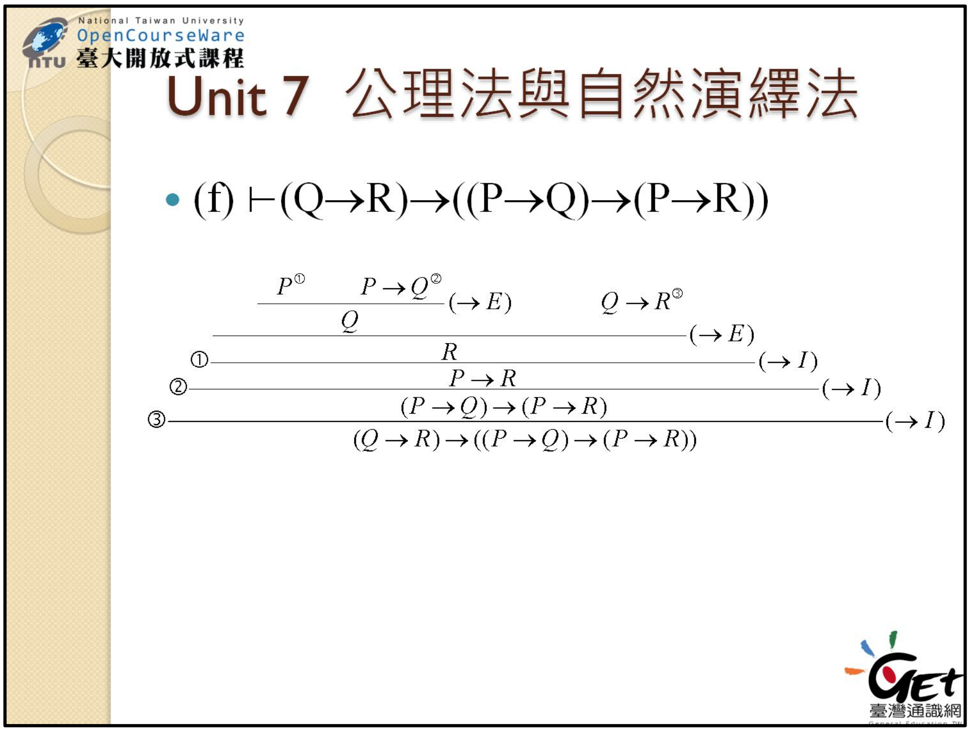
接下來選言符號，如果ϕ可以推出$\phi \vee \psi$，或者ψ可以推出$\phi \vee \psi$，這些各位都可以接受。
比較麻煩的是消除規則，這裡如果有$\phi \vee \psi$，我把這個ϕ拿過來可以導出χ，ψ拿出來也可以導出χ，那我們就可以說χ是成立的，所以$\vee$就可以去掉，他畫錯了，這應該是$\vee$的elimination。



m-1121 00:12:35

接下來我們來做一些實例的練習，

我現在想要證他是一個定理，這裡有一個main connective是一個條件句，如果他是條件句的話，你就把前面這個當成是我們假設的ϕ，然後設法導出後面的ψ，根據introduction rule你就可以得到ϕ→ψ。
後面括號main connective也是條件句，所以其實我用這個也可以導出這個。
然後在裡面也是一個conditional，所以我可以假設P來導出Q，我的想法大概是這樣。
這個也一樣，這個是一個conditional，我可以假設這個，然後把前提放進來想辦法導出這個R。
那c呢，他是bi conditional，你看到這個是A↔C，那我就是要證明A→C，另外一邊要證明C→A，然後把它合起來。那d顯然就是假設¬N。
最不容易思考的大概是最後一題，根據我們V的introduction rule，我只要證明P或是¬P就解決了，困難的地方在於它沒有前提，所以最後一題的策略，先假設他是否定，然後一路導出矛盾，就表示這個否定是矛盾的，所以他原來就是成立的，利用剛剛RAA的想法。



m-1121 00:16:35

所以我們先來看(a)，因爲要讓各位看得更清楚的關係，我沒有把它劃掉，我來帶著各位劃掉。我要證明這個，所以我把前面這個當假設，後面這個是main connective，又是conditional，所以我把P→Q也當假設，更有趣的是，裡面這個也是conditional，所以我也把P當假設。

所以我就可以得到這樣一個過程，我先假設P，然後P→Q當假設，我可以得到Q，然後我可以從這個Q跟Q→R，可以得到這個R，我們就可以得到後面這個P→Q。

各位從假設P可以一路推到R，當你這邊寫P→R的時候，這邊就要把它劃掉，我這裡寫1，這裡寫1表示說，在這個假設裡面我把1去掉了。

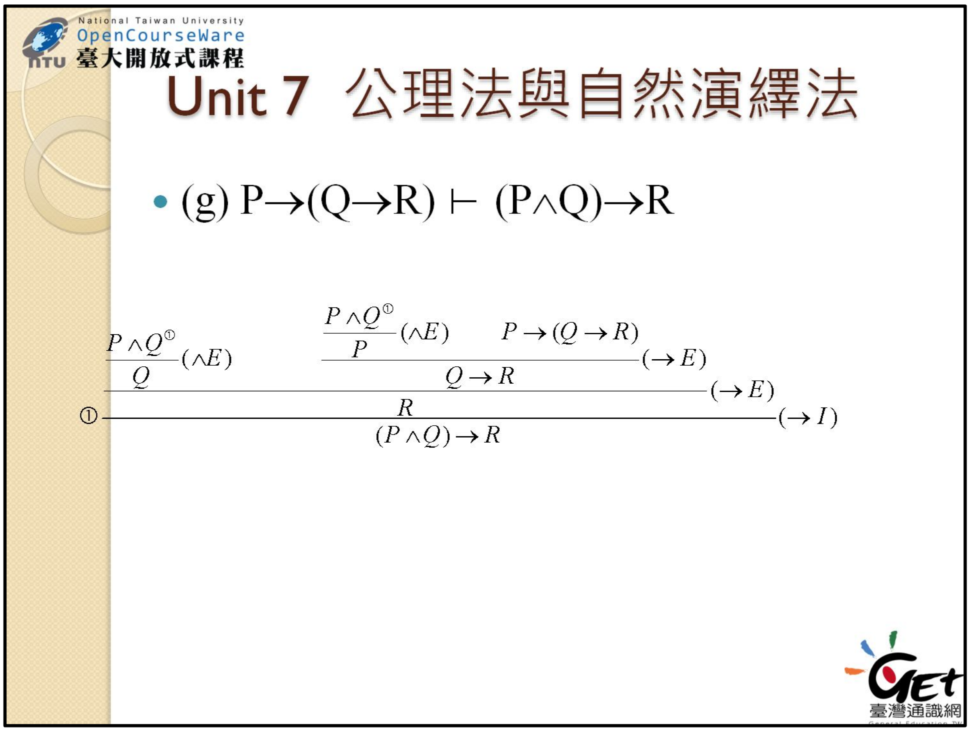
接下來我們剛剛是不是也假設2？在這裡我把2拉下來，用introduction rule，就會變成P→Q可以一路做到P→R。

第3個我們也假設Q→R，我們一路拉下來也可以得到(Q→R)→((P→Q)→(P→R))。

那我們怎麼知道我們要拉1拉2還是3？

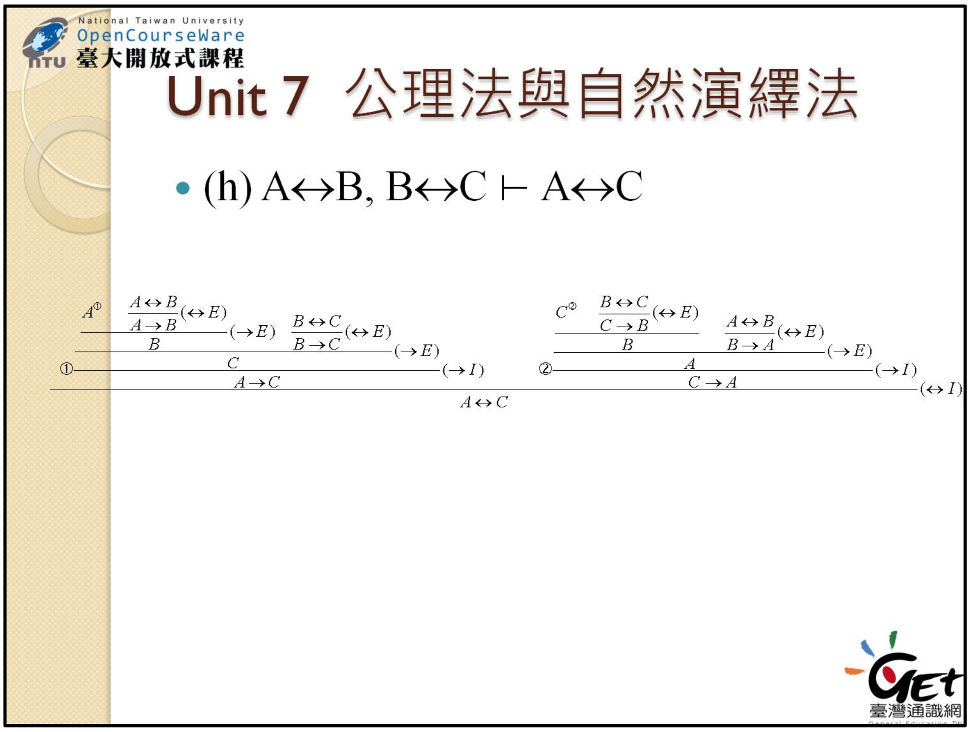
各位要記得這叫作目標導向，你要拉哪一個是根據你要得到什麼結果來決定的，不是任意決定的。

也就是我先利用拆解的方式把它拆解，最後再把他組合回去，這就是我要的答案。



m-1121　00:20:36

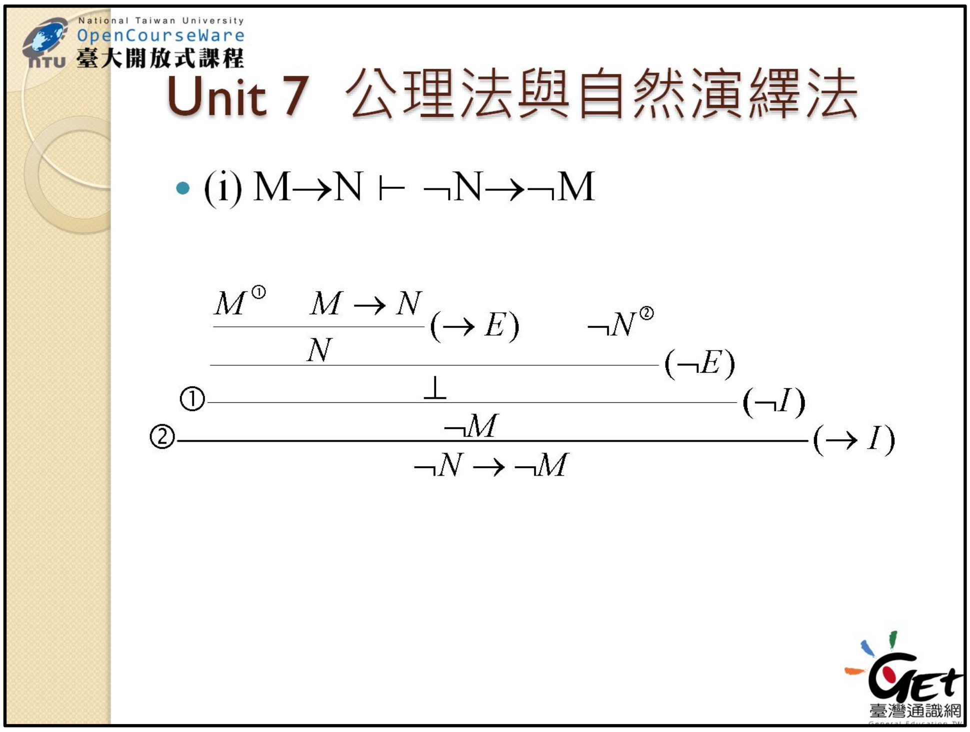
比如像範例(b)，
這個做法是這樣，這個既然是conditional，前面這些都可以當前提用，
我們的目標是要導出R，那這個顯然可以得到P、Q，如果有P，我們就可以用剛剛的elimination rule得到Q→R，然後Q又進來了，我們再一次根據elimination rule，就可以得到R，這樣就達到我們的目的了。
所以我們先從P∧Q放進來先得到P，然後這個前提放進來之後，你會從P跟P→(Q→R)得到Q→R，這是他的elimination rule，然後你這邊又可以得到Q，Q放下來利用elimination rule你可以得到R，這樣就表示說你假設這個P∧Q，可以藉由這個前提的幫忙得到R，所以你最後就是(P∧Q)→R。
自然演繹法跟公理法的重大特徵在於，在解題過程當中，你需要一些策略應用，因為它們都沒有固定的程序或是方法，讓你決定某個論證到底是個有效論證或是無效論證。



m-1121　00:22:47

比如像這個怎麼辦？
這個證明當然就是要從A導到C，另外一邊是from C to A。

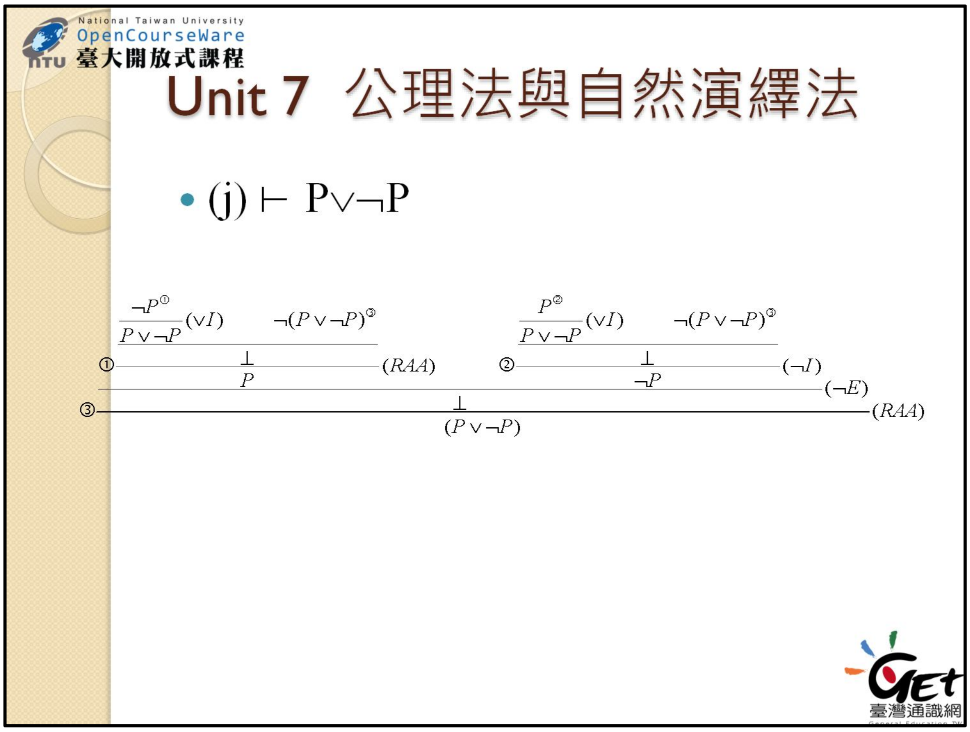
最後把兩邊combine起來就是這樣，假設A，一路證到C，我就可以證明出A→C。
另一邊是什麼？我假設C，一路證到A，那我就可以證明出C→A。
再把這兩邊利用equivalence的introduction rule結合起來，就是我們要的結果。



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{M^{①} \quad M \to N}{N}(\to E) \qquad \neg N^{②}}{\perp}(\neg E)}{\neg M}(\neg I)\,①}{\neg N \to \neg M}(\to I)\,②$$

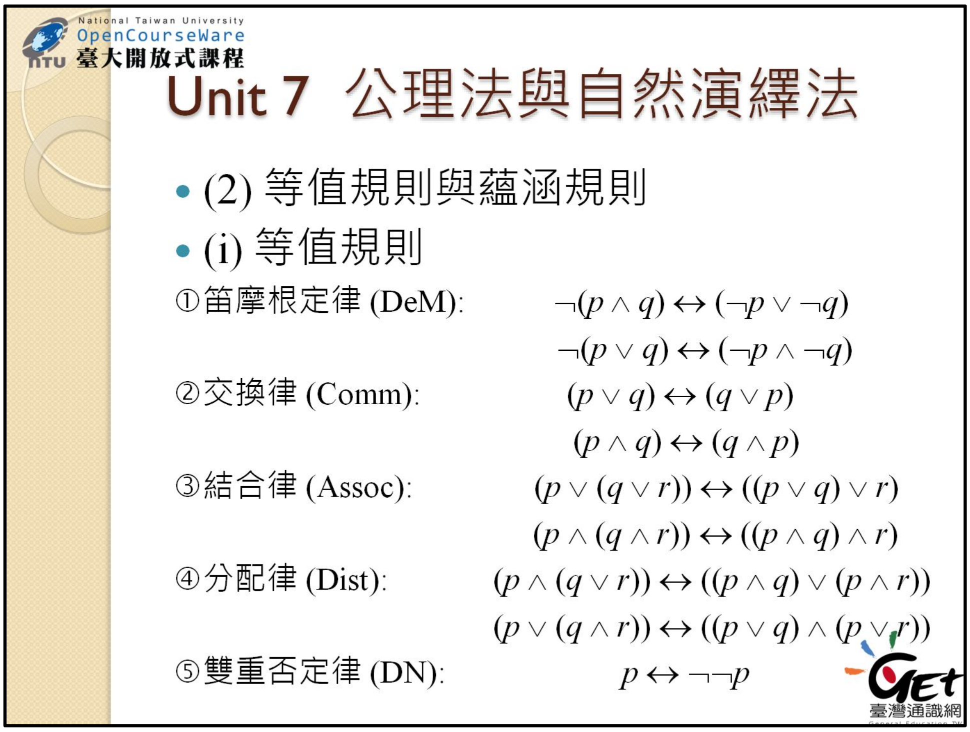
m-1121　00:24:16

接下來這個更簡單，這個證明其實就是，我們利用前面這個M→N設法得到¬N→¬M，這個意思相當於是問要如何利用M→N和¬N得到¬M呢？
考慮一下，如果¬N放進來要得到falsity，就是要找到N，要找出N就要假設M，所以意思就是如果假設M會得到矛盾，那麼它的反面就會成立，根據剛剛的introduction rule。
如果從¬N一路可以推到¬M，那麼就可以得到¬N→¬M。所以這題的證明方式是假設M，利用elimination rule得到N，然後跟¬N放在一起，然後把假設的¬N放進來得到falsity，所以就表示假設M會得到矛盾，得到矛盾後，我們就可以利用¬的introduction rule得到¬M，最後，把預設前提¬N放進來，就可以得到¬N→¬M的結論。
比較難的策略大概是第5個實例。



m-1121　00:26:14

這個例子稍微難一點點，因爲他沒有前提。
各位要知道老師提供的不一定是唯一的解法，一定還有其他的方法。
我們既然沒有前提，代表所有都要靠假設，我們假設3要得到矛盾，
因此我們先假設¬P，下來是利用V的introduction rule，然後可以跟這個結論的¬
得到這個falsity，得到falsity之後，這個1就會變成P，然後再利用P得到falsity，同樣的道理會得到¬P，這兩個又是一個falsity，所以最後你會得到3他其實是一個會導致矛盾的。
策略大概是這樣，我只能從¬想辦法去找到他的矛盾出現。



m-1121　00:29:27

接下來我們來看另外一個規則。

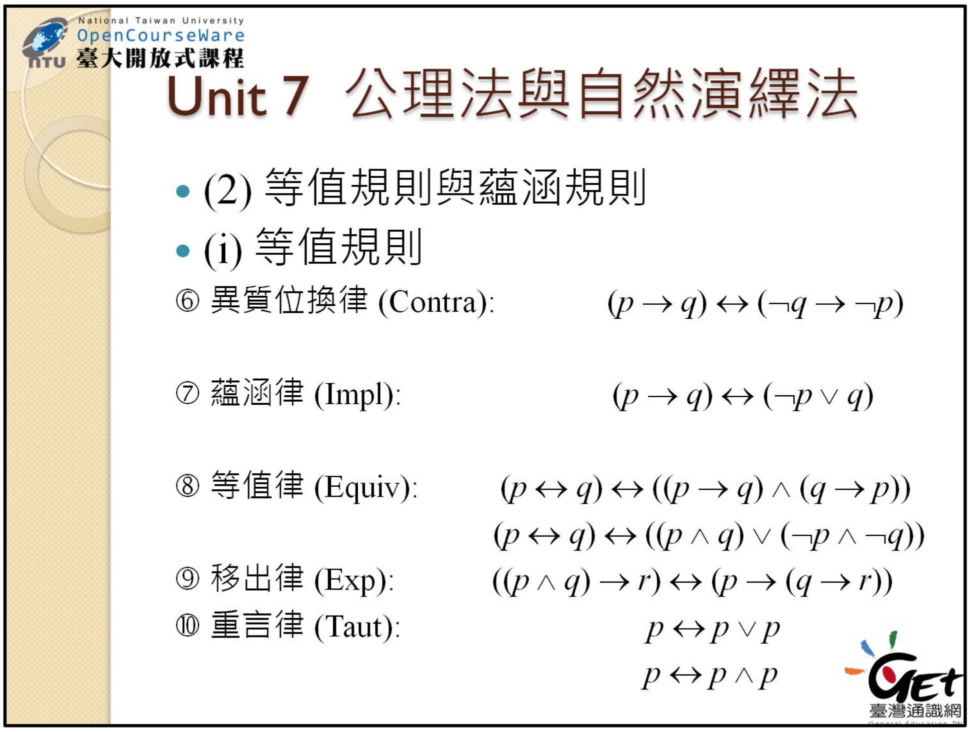
首先第一個是DeM rule，如果他是M的negation，小心這個negation在外面，$\neg(p \wedge q)$會等值於$(\neg p \vee \neg q)$，你把他放進去會是$(\neg p \vee \neg q)$。一樣的，這是$\neg(p \vee q)$會等值於$(\neg p \wedge \neg q)$。

再來是交換律也很容易，就是$(p \vee q)$跟$(q \vee p)$是一樣的，或是$(p \wedge q)$跟$(q \wedge p)$是一樣的。

再來是結合律，如果兩個都是V，他先括前面或是括後面都沒關係。

再來是分配律，這個大概是沒有什麼問題。

再來是Double negation，這個對各位來說是更簡單，就不用多說了。



m-1121 00:31:50

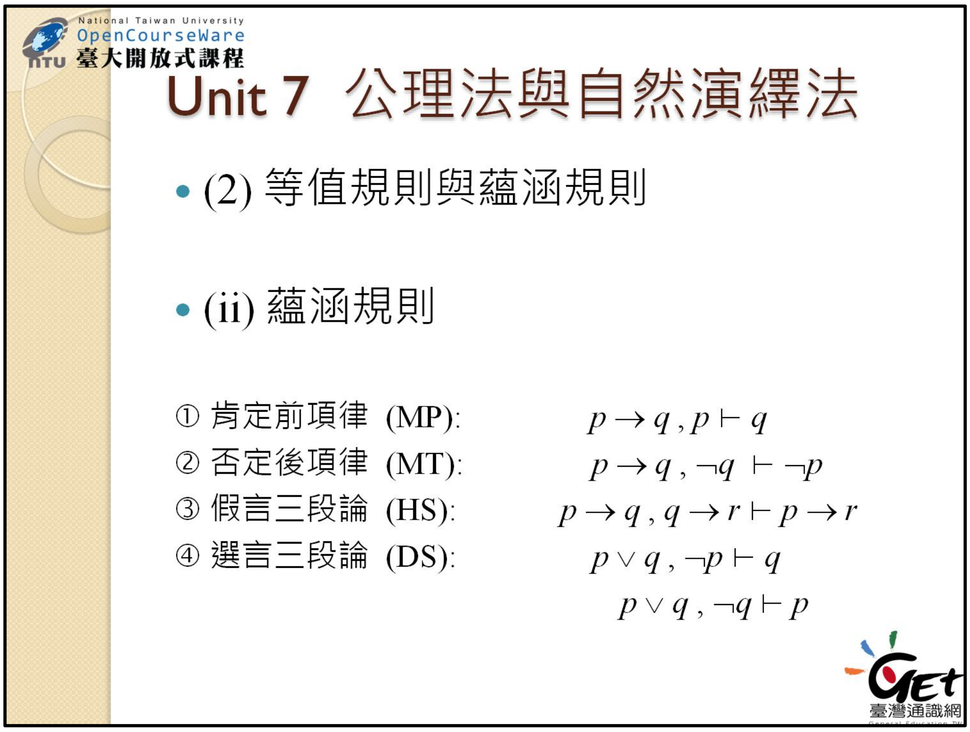
這個稍微困難一點點，不過也可以接受，因為我們在學期初就講過了，$(p \to q)$會等值於$(\neg q \to \neg p)$。

再來是蘊涵律，這個我們在前面等值有證過，所以這個$(p \to q)$可以等值於$(\neg p \vee q)$。

再來是等值律，這個我們也說過，$(p \leftrightarrow q)$可以變成$((p \to q) \wedge (q \to p))$，
或者是$(p \leftrightarrow q)$可以變成$((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$。

再來是移出律，這個可能難一點，基本意思是說，$((p \wedge q) \to r)$可以變成$(p \to (q \to r))$。

再來是恆真律，這個太簡單了，就是p可以變成$(p \vee p)$，或是p可以變成$(p \wedge p)$。就是不管講幾次都是一樣的意思。請問這位林同學妳同意嗎？林同學：可是時間不一樣啊。說得太好了，我喜歡這個答案，
他是跟時間相關的，因為所謂愛這件事是可以跟著時間有所不同的，
如果她講的是對的，我們這個邏輯系統就不可以拿來處理這個答案，
我們需要另外一個邏輯系統，跟時間相關的邏輯。



m-1121 00:36:59

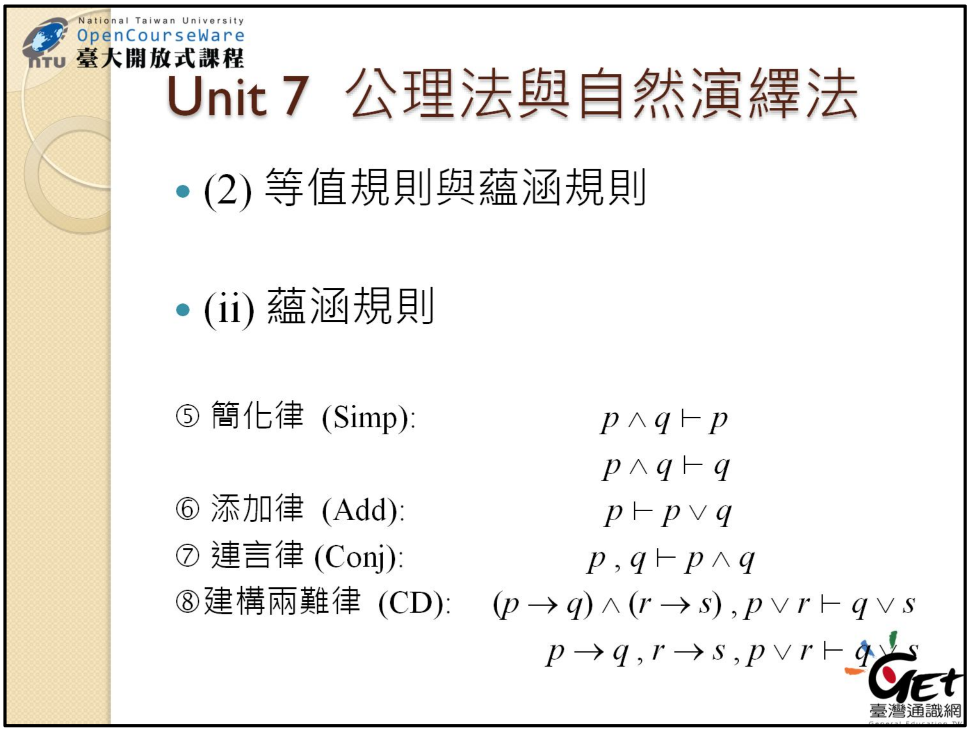
接下來蘊涵規則。

如果是MP規則，就告訴我們是p→q，然後跟p就可以推出q，

再來是MT規則，
它的意思是，如果條件句成立，經由後件的否定，我們就可以得到前件的否定。

再來是假言三段論，
如果我們在推論過程中出現p→q、q→r，那麼就可以得到p→r，

再來是選言三段論，
你就想像說甲或是乙是嫌疑犯，
那不是甲，就可以推論出是乙。
那如果不是乙，那就是甲嘛。
他的想法其實就是這樣子。



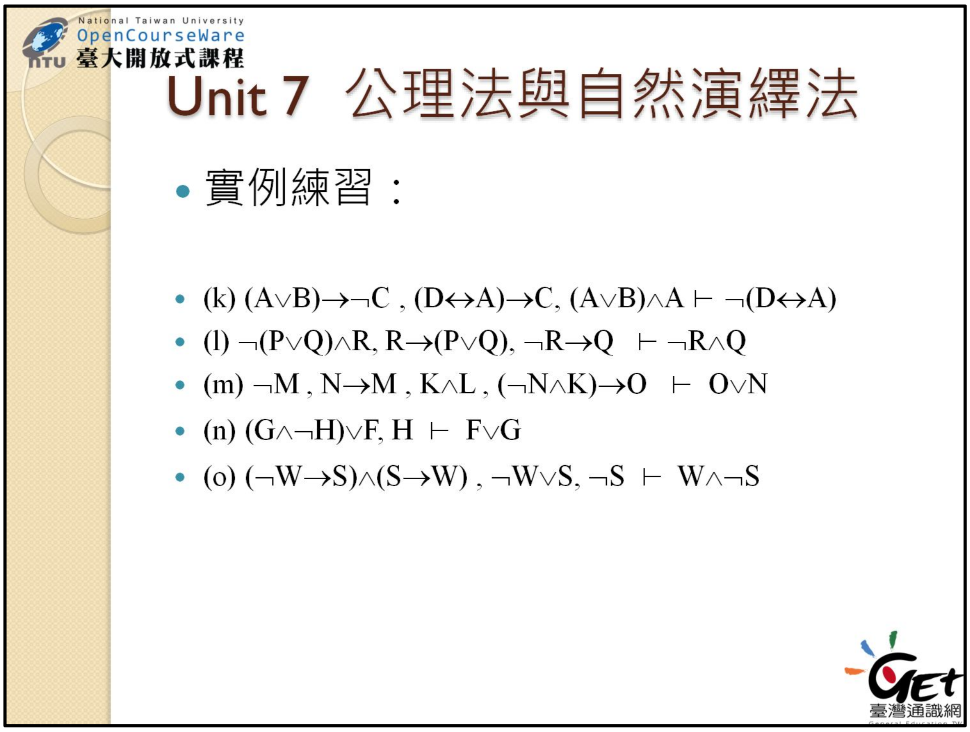
m-1121　00:39:22

簡化律就是，
p∧q可以得到p；p∧q可以得到q。

再來是添加律，
P可以推出p∨q，或是q∨p，這個也沒有問題。

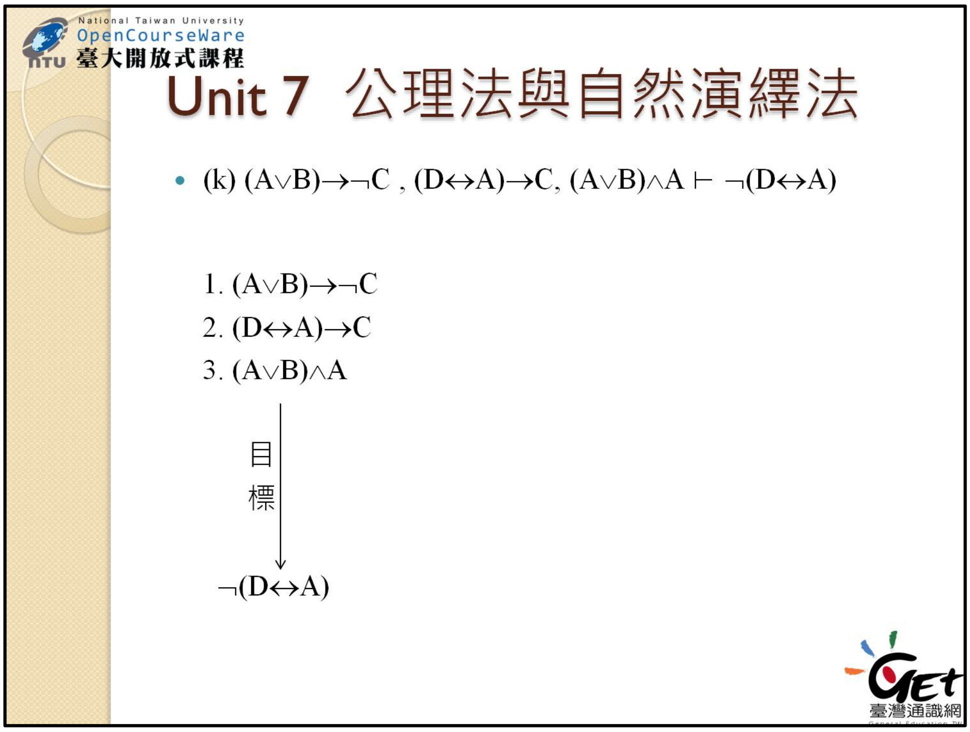
再來是Conjunction，
推論過程出現p、q，那就可以得到p∧q。

再來是建構兩難律，這個是最麻煩的，應該有一半的同學會覺得看起來一點都不自然，為什麼看起來沒有那麼直覺？我想應該是太複雜的原因吧。就是如果(p→q) ∧(r→s)，我們假設p∨r，那我們就可以得到q∨s。剛剛講到總共有18個規則，10個等值規則，8個涵蘊規則，
等一下我們要用這些規則來練習。



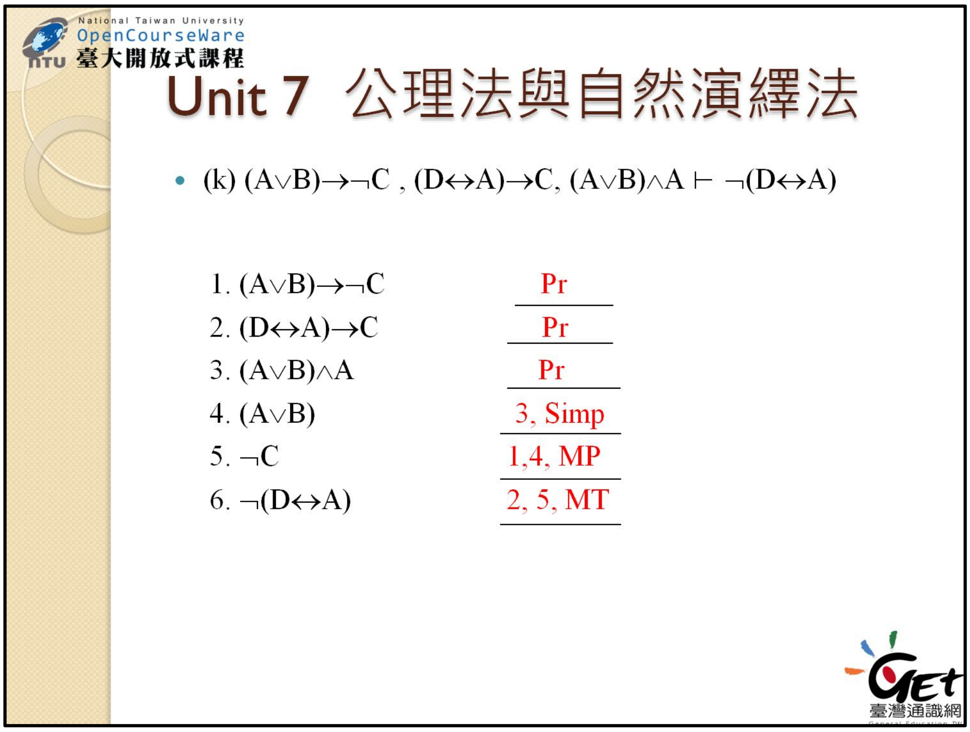
m-1121　00:42:53

我們幾個練習是這樣，在講之前我想先強調一點，在自然演繹法裡面我們會有前提，然後來證明他的結論對吧？



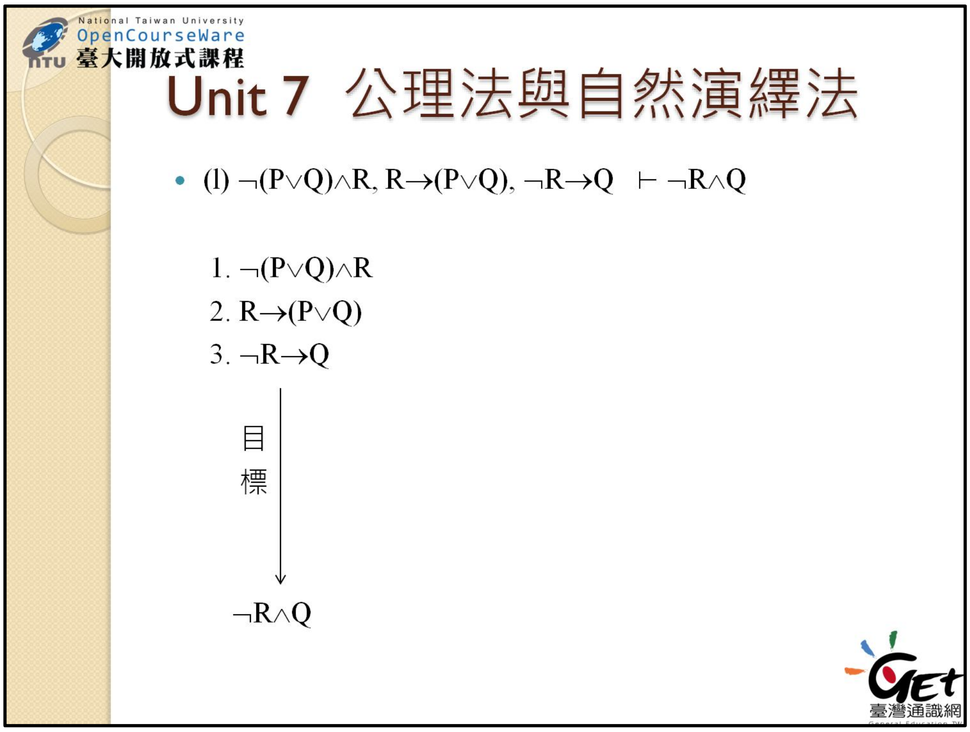
m-1121　00:43:11

比如說我們以第一題爲例，我們有前提，然後有個目標我們想要得到這個東西，思考上我們是把這個前提放在那裡，然後我們是目標導向嘛，所以我們要想辦法把最後那一個語句導出來。那萬一沒有前提怎麼辦？這位同學要不要提供一點意見？
同學：轉出前提來。
沒錯，有點道理，我們可以假設一些前提是吧，
如果後面結論是有conditional的，那conditional前面那個是可以拿來當前提用的，最後再把它劃進來，像剛剛那個introduction rule一樣對吧？
那個證法我們會叫做條件證法。
另外一個，沒有前提，後面也不是conditional那怎麼辦？
那就假設他的否定，設法導出矛盾，這個我們叫做間接證法。
接下來我們來思考一下，要怎麼從這三個前提得到下面這個結論。
各位看一下，前提中跟¬ (D↔A)相關的語句就是(D↔A)→C，
所以要得到結論¬(D↔A)，就要先得到¬C，然後利用MT規則得到想要的結論。
那麼，你又要怎麼得到¬C呢？顯然你需要(A∨B)，因此，你應該要利用最後一個前提得到(A∨B)，經由這些步驟，就可以得到結論。



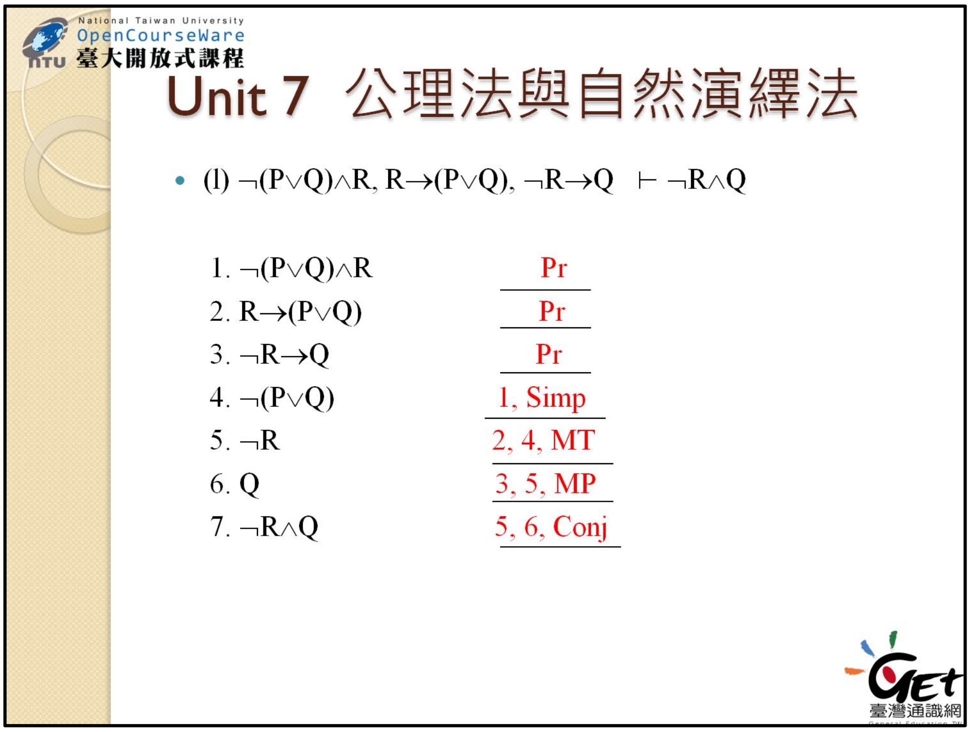
m-1121　00:46:57

所以他其實是這樣子的。
所以應該是說，我有這三個前提，第一個步驟，讓我們利用簡化律將(A∨B)拉下來，然後根據(A∨B)和前提1，利用MP規則得到¬C，再利用¬C和前提2的MT規則得到¬(D↔A)。



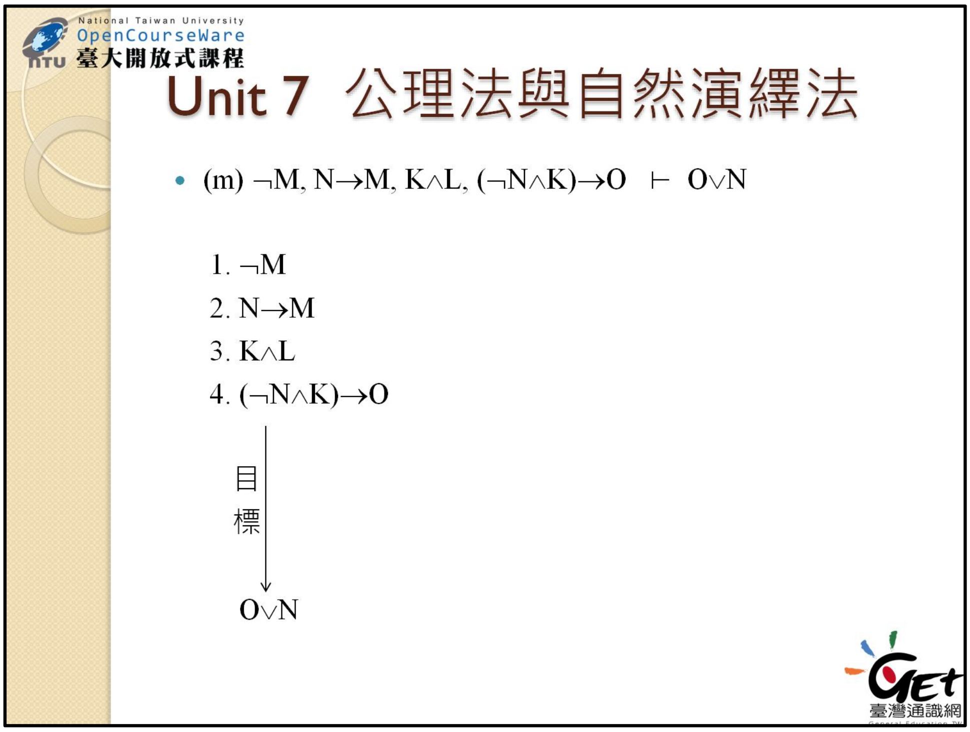
m-1121　00:47:26

第3個沒有check好，應該是¬R→Q。
如果我要得到¬R∧Q，
我就要證明¬R、Q，然後再把兩個conjunction。



m-1121　00:48:32

他的推論應該是這樣，我們一樣有這三個前提，然後這個先用Simplification規則得到¬(P∨Q)，再經過MT規則的運用得到¬R，得到¬R之後呢，就可以得到Q，因為前提3是¬R→Q，所以只要¬R出來，就可以得到Q，最後再把¬R和Q結合起來成為一個conjunction就可以了。
所以利用的規則，首先是簡化律把前面¬(P∨Q)拉下來，再來用MT規則，這個是第2個後件的否定，所以就可以得到前件的否定¬R，再利用第3個MP規則得到後件Q，然後把兩個conjunction起來就可以得到我們要的。
同學：如果第1個得到R不就矛盾了嗎？
沒有錯，也就是說我其實有另外一個證法，所謂的間接證法。
我來寫一次間接證法給各位看，第1個¬(P∨Q) ∧R，就直接把R拿下來，
再透過第2個R得到(P∨Q)，然後把第1個¬(P∨Q) 放進來，(P∨Q) 跟¬(P∨Q)就會矛盾了，矛盾之後，就會得到¬R。
因為自然演繹法是目標導向，所要的是最短證明，所以我們就不需要多餘的步驟來證明。

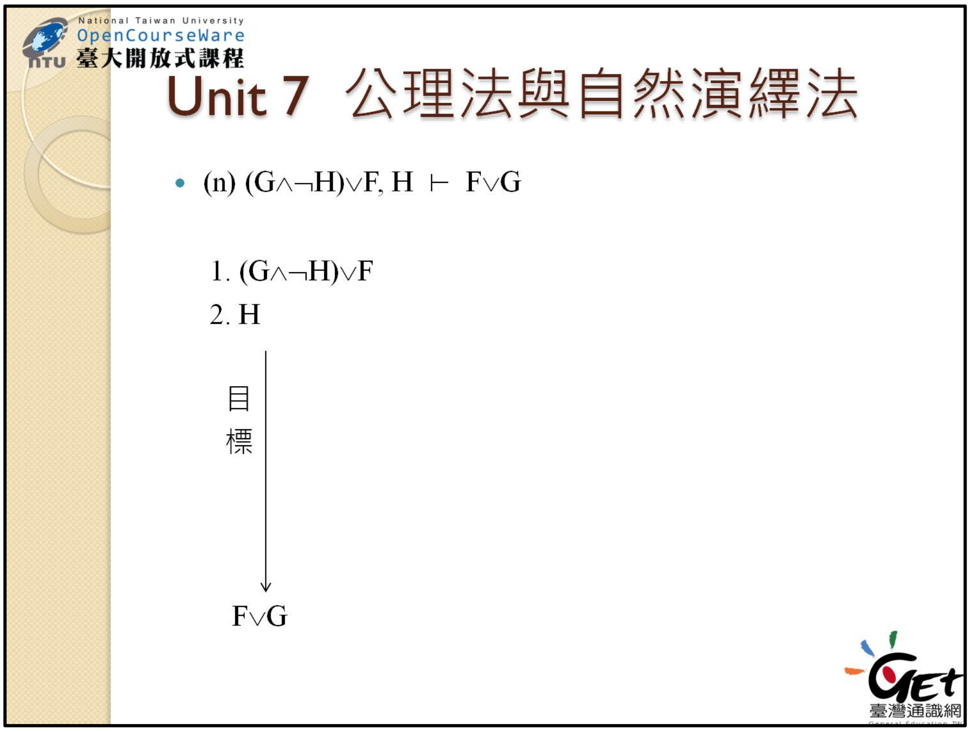


m-1121 00:54:35

c的例子是這樣，如果你看到目標裡面出現v，那就再簡單不過了，因爲只要證出來一個就好，你利用添加律馬上就可以得到結果。

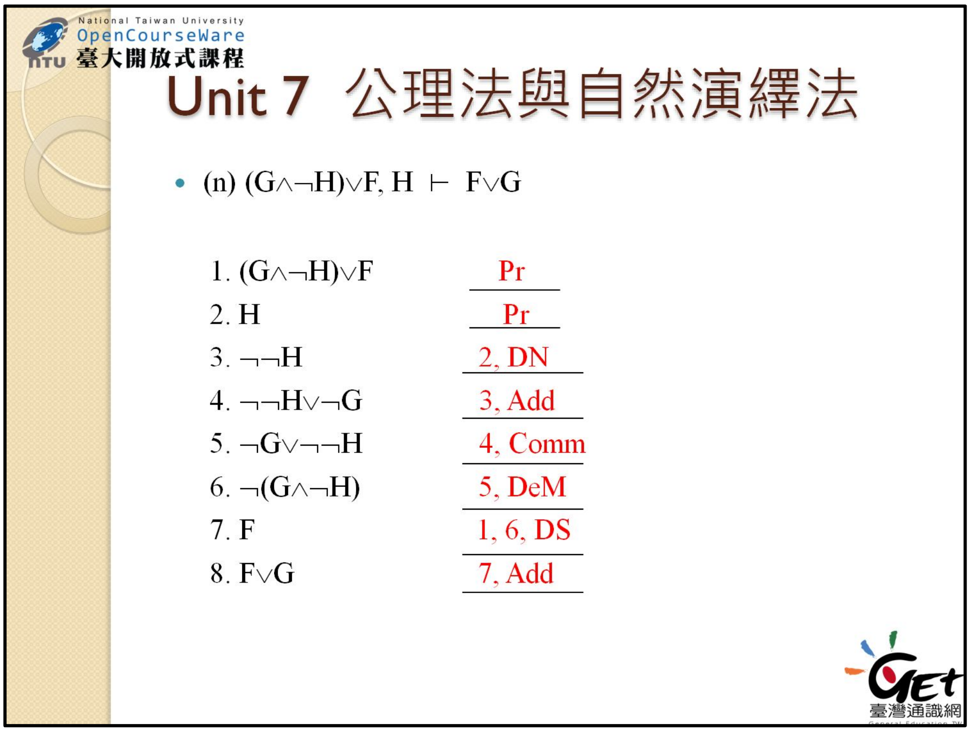
m-1121　00:55:15

我們有4個前提，利用他們來得到結果，如果我們要得到Q就要先得到(¬N∧K)，
所以就必須先得到¬N、K，K從第3個前提可以得到，
¬N要從第1、2前提可以得到，然後把他combine起來就可以得到我們要的結論。



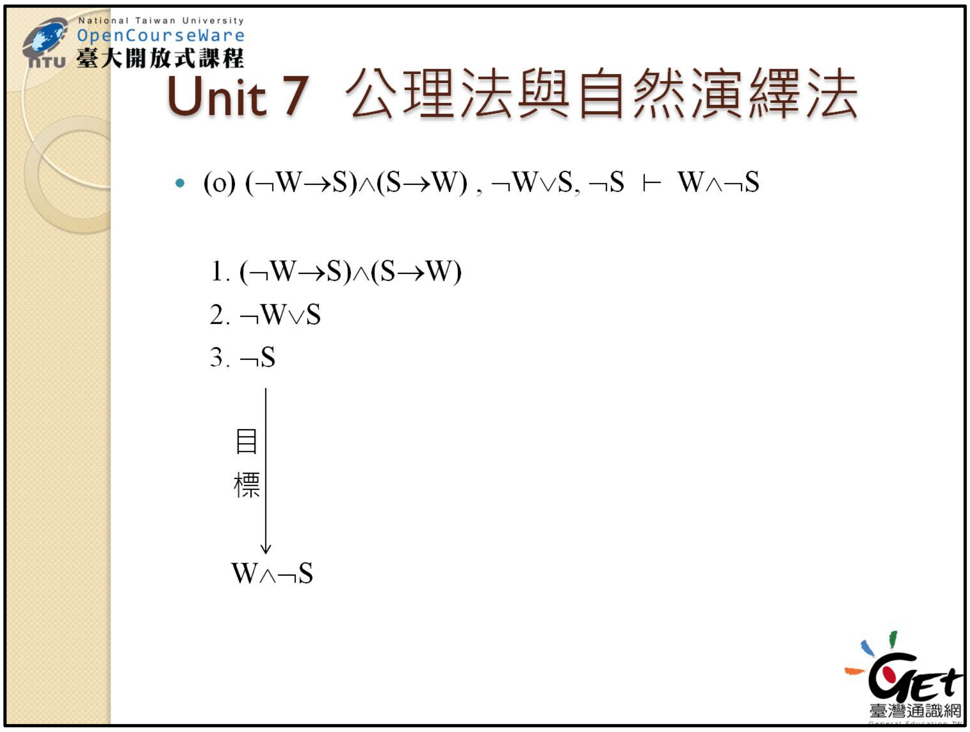
m-1121 00:55:57

這個就比較簡單，因爲結論看到v，所以只要證出一個就可以了。



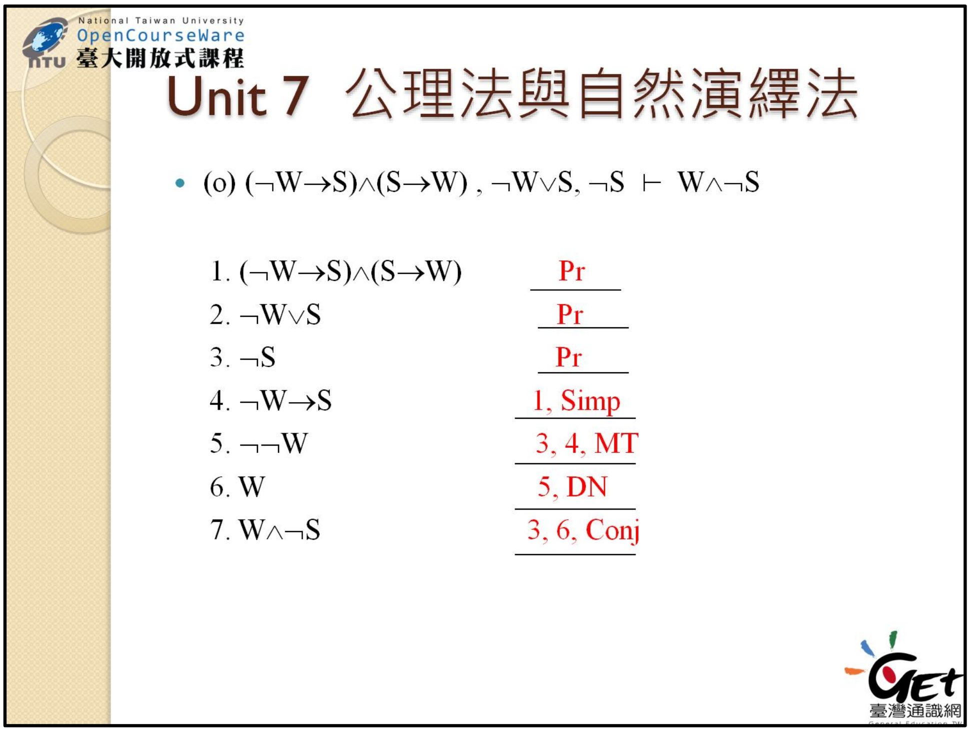
m-1121 00:56:25

所以我們的證明大概是這樣，我們有兩個前提，先做¬¬H，再利用Add把¬G加進來得到¬¬H∨¬G，然後再把它做Commutation得到¬G∨¬¬H，再利用DeM得到¬(G∧¬H)的結果，接著，可以利用DS規則得到F，再利用Add就可以得到結論了。



m-1121　00:57:26

再來是範例e，
各位會從哪裡下手？如果目標是要得到W∧¬S，那第3個前提已經有一個¬S，所以我們的目標顯然是要把W找出來。



m-1121 00:58:43

所以他的證明是這樣，先把第1個前提利用簡化律把¬W→S拉下來，
因爲第3個是¬S，所以會得到¬¬W，這樣才可以得到W。
在整個證明過程中沒有出現第2個前提，代表它是多餘的，不過並不影響整個推論。
以上就是線性的自然演繹法。