

Unit 6 真值樹系統

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示
—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

Unit 6 真值樹系統

- 真值表法所談論的是命題之間的語意蘊涵關係(semantic entailment relation)。
- 接下來，我們要學習的是命題之間的語法蘊涵關係(syntactic entailment relation)。
 -

前面所提到的真值表，都是在談論語句之間語意的蘊涵關係。

接下來要做的是語法的蘊涵關係，意思是根據推論規則逐步證明，這叫語法的蘊涵關係。亦即從前提開始，根據給定的推論規則，可逐步推論至結論，若成功，則稱語法蘊涵關係成立，若否，則不成立。

除了要知道其語意蘊涵關係，還要知道其語法蘊涵關係。

Unit 6 真值樹系統

- 在研究語意蘊涵關係時，我們關心的是前提與結論的真假值之間的關係。
- 然而，研究語法蘊涵關係所關心的是演算系統的建立，也就是證明命題之間的推論關係。也就是說，如何從前提開始，一步一步證明可以得到結論。

0211

在語法的蘊涵關係上，我們想要建立一個演算系統，能不能把前提經由演算系統，經由結論，一步步得到結論，就是證明。在古典邏輯中，會介紹三種演算系統。

Unit 6 真值樹系統

- 從古典邏輯的發展歷史來看，有三種經常被提到的語法演算系統：
- (1)公理系統(Axiom System)
- (2)自然演繹法(Natural Deduction System)
- (3)真值樹系統(Tableaux System)



古典邏輯中，我們通常會介紹三種。

(1)公理系統：這是在邏輯剛建立時，當時邏輯學家都用這個來做證明，期中考後會介紹。這個系統蘊含一件事，就是你好像要很天才，如同你看到有些人對數學很厲害，隨便想想就證出來，公理系統的證明有點像這樣，有點靠天賦。

(2)自然演繹法：大概是在二零年代由Gentzen建立，自然演繹法的出現，對公理系統是一大進步，引進很多推論規則，可以用的東西多，證明的步驟就越簡單，可用規則越少，步驟就更複雜。公理系統的規則只有一條。自然演繹法通常有兩種：introduction rule、elimination rule跟 Natural Deduction System。

(3)真值樹系統：像一棵倒過來的樹，樹根在上往下長，在這所有系統中最有力的系統，它比前兩者優越的地方在於能決定論證是否有效，不過它還是有限制的，非所有一階邏輯都辦得到。前兩者的困難在於在作證明時，需要天賦，如果你證不出來，如何說它是有效或無效論證，在決定論證是否有效，決定性是薄弱的。

1.公理系統：會設定一些各位都會接受的公理，再藉由公理與其所認可的規則逐步做推論，可推論出的便稱定理(theory)，用這方式演算的便是公理系統。

2.自然演繹法：各位想想看何謂自然演繹法，其理想是如此：不用公理，拿掉它，增加各位認可的推論規則，做成一個演算系統。

3.真值樹系統：想法是說前面兩個系統有點讓人擔憂，各位高中都做過數學證明，有一種人，明明就是很難的題目，看兩眼就會了，如果請那位同學教我，他很認真教你，可是怎麼教都不懂，各位有沒有這經驗？

在那個做證明的時代，有一點是我們都尚未克服的，好像能不能做出這題目需要天賦，這種人在哲學中，我們稱之為inside。有沒有一個方法，是不需要靠天賦能夠證出來，邏輯學家也在找這樣的方法。如果我把樂高教給這位謝同學，一隻恐龍，請他建成房子，這時謝同學心想：我應該先把這隻恐龍先拆了，再裝成一棟房子。假設謝同學很沒有概念，組不成房子，怎麼辦？這是邏輯學家在研究的過程中，剛好邏輯學家找到一個系統，只要負責拆，不用組合。只要拆不需要組合，一方面不需要像前面兩個方法，需要天分，一方面只需要拆不需要組合。比其他系統來的更有力。

Unit 6 真值樹系統

- 關於證明的兩種策略：
- (1)如果能夠從前提開始，藉由推論規則逐步得到結論，則證明前提蘊涵結論。
- (2)假設前提與結論的否定是一致的，如果藉由推論規則得到矛盾，就表示前提蘊涵結論。真值樹系統即採取此策略。

證明有兩種策略，一是直接證法，由前提思考如何得到結論，二是歸謬證法/間接證法，先假設結論不成立，再往前推，得到矛盾，得到結論是成立的。真值樹系統採取的是後者的策略，公理系統與自然演繹法雖然也有歸謬證法的部分，大部分由直接證法的概念來。

- (1)常稱為直接證明法，大部分的公理法與自然演繹法採取這樣的思考方向。
- (2) 從反面來，**RAA**(歸謬證法)或間接證法，先假設結論的否定與前提放在一起，若做出來會導致矛盾，意思是前提成立的情況下，結論一定要成立。以反向思考。

Unit 6 真值樹系統

- 語法蘊涵關係的記號：“ $\vdash$ ”
- 如果以句式 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 作為前提，
能夠經由推論規則得到結論 ψ ，則稱
「 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 語法上蘊涵 ψ 」。
- 記法： $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \psi$

$\vdash$: turnstile。

記號是用turnstile，用它來表示蘊涵關係，語法上蘊涵。
或稱 ψ 是 φ_1 到 φ_n 的 derivation。

Unit 6 真值樹系統

- 真值樹的基本結構：
- 前提和結論的否定構成樹根(root)。
- 根據推論規則逐步分解。
- 當真值樹成長到無法再以推論規則進行分解，則稱為該真值樹已經完全展開。

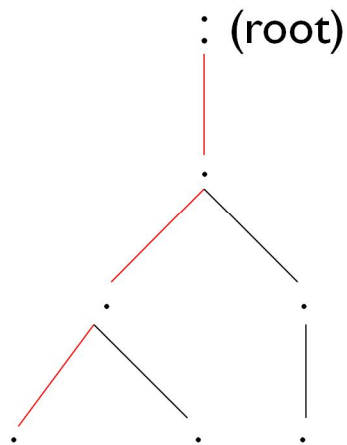
先假設前提跟結論的否定，然後假設前提與結論都成立，若把它們分解到最後得到矛盾，那就是我們假設前提都成立，結論的否定成立，這件事是不成立的。所以在前提都成立時，結論一定要成立。
等到真值樹無法再分解，我們稱這棵樹已完全展開。

目標是把前提跟結論的否定放在一起，看看它成立否。第二件是用推論規則推論。推到無法再分解，何謂無法再分解？就是推到只剩下命題符號與命題符號的否定，就說這棵樹已經完全展開。便可判斷是否為有效論證。

如果只剩下命題符號與命題符號的否定，我們便說這棵樹已經完全展開

Unit 6 真值樹系統

- 真值樹的圖示



完全展開後，如果你發現最後產生矛盾的地方，我們就會把branch關起來，如果所有都關起來，表示它是矛盾的，因此前提與結論的關係成立。如果有一個branch是打開的，就說至少有一個結構是讓前提都成立而結論不成立，顯然它構成無效論證，它是反例。

Unit 6 真值樹系統

- 真值樹的圖示說明：
- 每個點都代表一個句式(formula)。
- 每個分枝(branch)都代表一個結構。

結構指的是所有的命題符號的真假值的組合。
在一個結構裡不能出現矛盾，若產生矛盾，就會關起來。

Unit 6 真值樹系統

- 在真值樹的分枝上，如果同時出現某個句式與該句式的否定句，則該分枝即為封閉的，以符號「 $\times$ 」表示。

|
 ϕ
 $\neg\phi$
 $\times$

在某個branch出現這個情況： ϕ 、 $\neg\phi$ 同時出現，便是封閉。

爲什麼？因爲我們說過了，從語意學的情況就能想像，如果在一個結構中，同時出現 ϕ 、 $\neg\phi$ ，表示要忍受 ϕ 是真，又要忍受 ϕ 是假，表示這個結構本身是矛盾的。有人喜歡活在矛盾的世界嗎？各位覺得這世界充滿矛盾請舉手，請問簡同學爲何世界充滿矛盾？某個人做事這一刻跟下一刻可能完全不一樣，對不對？各位想想看，這是有趣的現象，如果某個人這一秒做的事跟下一秒完全不一樣，你會跟這個人說：「你這個人充滿矛盾。」你這要說的意思是什麼？表示你前後不一，非常矛盾，表示這個人行爲是非理性的，「你不能有矛盾的，你要理性點。」你是要告訴他這件事。

你這個人充滿矛盾，事實上是理性的，所以我會要求你理性點。事實上我們認爲這世界是不應有矛盾的，因爲我們不想忍受矛盾。難道有人表現矛盾時，你會說：「很好，我喜歡。」

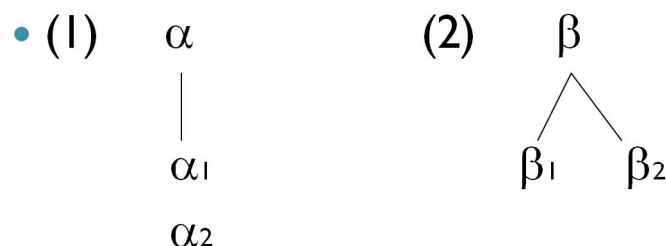
矛盾令我們覺得可怕的地方在那？就是他非理性，所謂非理性就是任意的，所有行爲都會變成任意的，因爲所有結論都成立，只要前面有矛盾或不一致，所有結論都成立，所以我們爲何會害怕矛盾，因爲假設一個人承認他矛盾的，那他不管做什麼都可以，沒有任何可預測性，不可預測對我們而言是可怕的。比如說你們會預期老師等一下要做什麼，你們覺得老師是理性的，所以我會很認真在這上課，假設我是不理性的，說不定下一秒我跳上桌子，更不要說到了期末，老師開始要打成績時，各位一定覺得老師是要理性的。

我們對於人理性的要求是一定是要可預測的，所以雖然我們覺得這世界充滿矛盾，但我們一直在努力告訴他這樣是不好的。

所以我們希望整個結構若是矛盾的，就把它封閉，因爲他非我們理性中所容許的結構。

Unit 6 真值樹系統

- 推論規則的兩種類型：



在真值樹中，有兩種基本規則，一是直線走的，表示 α_1 、 α_2 是相關的；二是分成兩邊的，表示 β_1 、 β_2 是不相關的。

第一種type叫 α ，分解出來， α_1 、 α_2 會在同一個branch上，第二種叫 β ，表示要分開，變成兩個分支，分別是 β_1 、 β_2 ，規則只有兩種，這兩種type是什麼意思呢？第一種指的是conjunction，兩句話要綁在一起，第二種是disjunction，是分開的，只要有一個為真就夠了。

第一種可以把它放在同一branch，根據推論規則，我們有個構想，我們把所有的formula的main connective通通變成conjunction或disjunction。

Unit 6 真值樹系統

- 類型(1)：由句式 α 分解為 α_1 和 α_2 ，且 α_1 和 α_2 在同一分枝上。從結構的觀點來看，就是句式 α 要為真，必須在 α_1 和 α_2 均為真的情況下。因此類型(1)用在主要連接詞是連言的情況。
- 類型(2)：由句式 β 分解為 β_1 和 β_2 ，且 β_1 和 β_2 在不同分枝上。從結構的觀點來看，就是句式 β 要為真，只要 β_1 或 β_2 為真即可。因此類型(2)用在主要連接詞是選言的情況。

一：連言意思是 α 就是 α_1 跟 α_2 ，

二：表示 β_1 的真假無法由 β_2 決定，意思 β 要為真，只要其中一個為真就好了，意思就是選言的情況。

第一種類型講的就是conjunction。

第二種類型講的是disjunction，只要有一為真就可以。

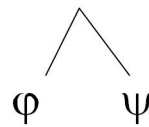
Unit 6 真值樹系統

- 推論規則的兩種類型實例：

• (1) $\phi \wedge \psi$



(2) $\phi \vee \psi$



我們把所有的formula的main connective 變成conjunction或disjunction

Unit 6 真值樹系統

- 根據真值函映完備性的證明，古典邏輯的連接詞可以用 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 定義之，因此每個複合句式都可以找到主要連接詞為連言或選言的等值語句。

只要用到 $\wedge$ 、 $\vee$ 就好， $\neg$ 只會用到double negation的規則。

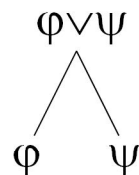
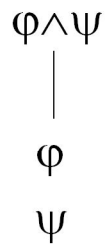
Unit 6 真值樹系統

- 首先，我們要介紹推論規則(i)，即和五個連接詞直接相關的推論規則。
- (i-1) : $\neg\neg\phi$
- (i-2) : $\phi \wedge \psi$
- (i-3) : $\phi \vee \psi$
- (i-4) : $\phi \rightarrow \psi$
- (i-5) : $\phi \leftrightarrow \psi$

根據我們truth functional的complete的principle，曾說過我們可以根據negation、and、or來定義truth functional的operator，就是真值涵映的連接詞通通可以用這三個連接詞定義，可見這系統是完備的。簡單來說，可以用這個系統做演算。每一個formula都可以找到它的主要連接詞是conjunction或disjunction，把它換成等值語句後，就可以理解演算規則的意思了。

Unit 6 真值樹系統

- 推論規則(i)：



- 第一個： $\neg\neg$ ，我不是不愛你，推論下來就是我愛你。
第二個：在同一個branch。
第三個：分成兩個branch。

Unit 6 真值樹系統

- 以真值表證明 $P \rightarrow Q$ 等值於 $\neg P \vee Q$ 。

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	F T
T	F	F	F F
F	T	T	T T
F	F	T	T T



Main connective是 $\vee$ ，用第二類分解。

接下來要做的是if...then，我們的規則只有連言跟選言，所以要設法把if...then變成連言或選言的formula， $P \rightarrow Q$ 可以變成 $\neg P \vee Q$ ，兩者真假值一樣，因此是等值的。這我們已經練習很多次了，「如果你愛我的話，那你就買鑽石給我。」換成 $\neg P \vee Q$ ，就是「你不愛我，或者買鑽石給我。」是不是一樣？大致上是一樣的，在當代邏輯中有問題，只是非本課程範圍。

我們通常不會說：「你不愛我，或者買鑽石給我。」我們會用一個更厲害的字眼：unless，除非你不愛我，否則買鑽石給我。

Unit 6 真值樹系統

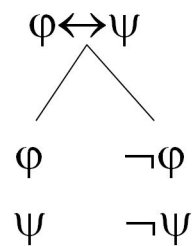
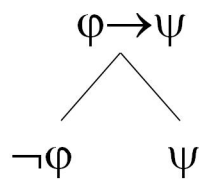
- 以真值表證明 $P \leftrightarrow Q$ 等值於 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T	T	T	T T F F
T	F	F	F F F T
F	T	F	F F T F
F	F	T	F T T T

要證明 $P \leftrightarrow Q$ 等值於 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 。

Unit 6 真值樹系統

- 推論規則(i)：



Unit 6 真值樹系統

- 接下來，我們要介紹的是推論規則(ii)，是出現在推論規則(i)中的句型加上否定號的推論規則：
- (ii-1) : $\neg(\phi \wedge \psi)$
- (ii-2) : $\neg(\phi \vee \psi)$
- (ii-3) : $\neg(\phi \rightarrow \psi)$
- (ii-4) : $\neg(\phi \leftrightarrow \psi)$

接下來第二組規則，是加了negation，目標是去找到這些語句的等值語句，而且該等值語句的main connective是連言或選言。

Unit 6 真值樹系統

- 以真值表證明 $\neg(P \wedge Q)$ 等值於 $\neg P \vee \neg Q$ 。

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	F T	F F F
T	F	T F	F T T
F	T	T F	T T F
F	F	T F	T T T



(ii-1) : $\neg(\phi \wedge \psi)$ 的等值語句是 $\neg P \vee \neg Q$

這個規則是一個有名的邏輯學家笛摩根找到的，所以就稱為笛摩根定律。 and 跟 or 有個有趣的現象， $\neg(P \wedge Q)$ 、 $\neg P \vee \neg Q$ 是一對，這對東西是若把 $\neg$ 放在 $(\phi \wedge \psi)$ ，展開後， and 要改成 or ， or 要改成 and ，個別加上negation。

Unit 6 真值樹系統

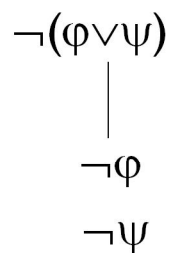
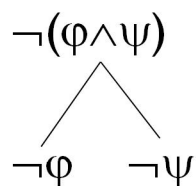
- 以真值表證明 $\neg(P \vee Q)$ 等值於 $\neg P \wedge \neg Q$ 。

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F T	F F F
T	F	F T	F F T
F	T	F T	T F F
F	F	T F	T T T

另一個笛摩根定律的等值語句。

Unit 6 真值樹系統

- 推論規則(ii)：



以上兩個推論規則的表示方法。

Unit 6 真值樹系統

- 以真值表證明 $\neg(P \rightarrow Q)$ 等值於 $P \wedge \neg Q$ 。

P	Q	$\neg(P \rightarrow Q)$	$P \wedge \neg Q$
T	T	F T	F F
T	F	T F	T T
F	T	F T	F F
F	F	F T	F T

邏輯教我們一件事，如何說真話，又不得罪人。甚至我們可以講到別人不知道原來是等值的，只要他沒學過邏輯的話。講真話而且同時不得罪人並不是困難的事。

Unit 6 真值樹系統

- 以真值表證明 $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 等值於 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 。

P	Q	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
T	T	F T	F F F F F
T	F	T F	T T T F F
F	T	T F	F F T T T
F	F	F T	F T F T F

Unit 6 真值樹系統

- 推論規則(ii)：

$\neg(\phi \rightarrow \psi)$

|

ϕ

$\neg\psi$

$\neg(\phi \leftrightarrow \psi)$

/

ϕ

$\neg\psi$

$\neg\phi$

ψ

記得推論規則只有兩種type，一是連言，二是選言。其二，在分解時，一定是針對每句話的主要連接詞。

Unit 6 真值樹系統

- 真值樹系統的優點：
- (1)能夠決定論證是否為有效論證。
- (2)一旦證明某個論證為無效論證，可以掌握其反例結構。
- (3)推論規則只需分解，毋須考慮組合。

一、若用公理系統跟自然演繹法，若證不出來，就無法說明論證是否成立。萬一你證不出來呢？不能說它是無效論證，答案只能寫，我會跟不會，因為我不曉得該論證是否有效，真值樹系統提供給我們這樣的能力，在命題邏輯中可以證明某個論證是否有效，若是無效論證，並且可以舉出其反例結構，比前面兩個系統更 powerful。

Unit 6 真值樹系統

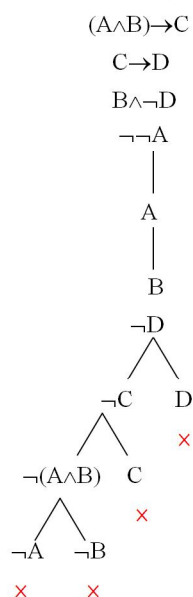
- 實例說明：

- (a) $(A \wedge B) \rightarrow C, C \rightarrow D, B \wedge \neg D \vdash \neg A$
- (b) $P \rightarrow (Q \vee R), R \rightarrow (Q \wedge P), Q \rightarrow R \vdash P \leftrightarrow Q$
- (c) $\neg Q \vdash (Q \vee (R \rightarrow \neg S)) \rightarrow \neg (R \vee S)$
- (d) $\neg S \vee (Q \vee P), \neg Q \rightarrow \neg P, P \rightarrow (R \wedge S) \vdash S$

(a)畫真值表大概要畫16個。

Unit 6 真值樹系統

- (a) $(A \wedge B) \rightarrow C, C \rightarrow D, B \wedge \neg D \vdash \neg A$



由於所有的分枝均封閉，所以這個論證為有效論證，或者說，前提語法上蘊涵結論。

兩個原則：

- 一是從簡單的開始做。推論規則沒有規定從那個句式開始分解，從那裡開始都可以。
- 二是盡量從不會造成分枝的句式開始進行分解。

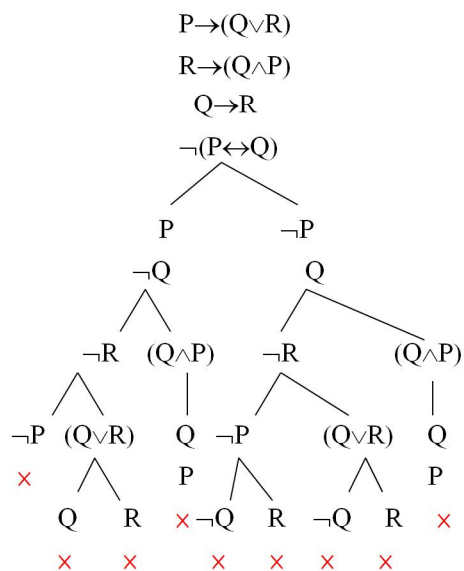
根據以上原則，先從 $A \wedge B$ 開始做。接下來，觀察一下，從可以被封閉的接著做，於是接著做 $C \rightarrow D$ 。

於是整棵樹都封閉，我們就說任何結構若假設前提成立，結論不成立，會使每一結構都產生矛盾，意思是沒有任何結構能滿足設定，因此此論證為有效論證，或說語法蘊涵關係成立。

樹根的組合是由前提前提前提，以及結論的否定組成。做題目的原則是盡量不要有分枝，越簡單越好。

Unit 6 真值樹系統

- (b) $P \rightarrow (Q \vee R), R \rightarrow (Q \wedge P), Q \rightarrow R \vdash P \leftrightarrow Q$

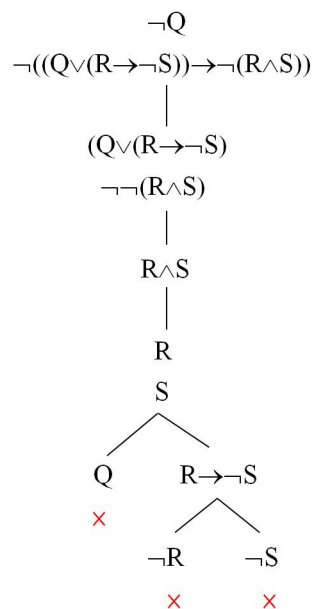


由於所有的分枝都是封閉的，
所以這個論證為有效論證。

原則從最簡單的做。首先，這四個都沒有 $\text{type}\alpha$ ，因此一定要有分枝。都是封閉的，是有效論證。

Unit 6 真值樹系統

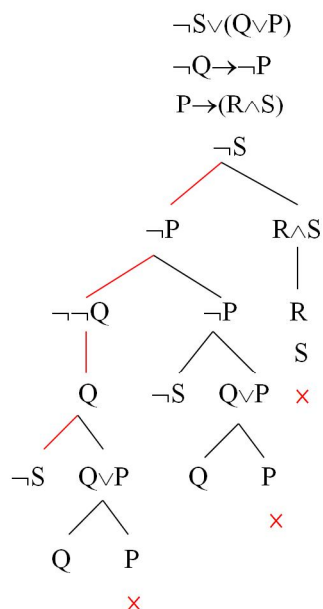
- (c) $\neg Q \vdash (Q \vee (R \rightarrow \neg S)) \rightarrow \neg(R \wedge S)$



由於所有分枝都是封閉的，
所以這個論證為有效論證。

Unit 6 真值樹系統

- (d) $\neg S \vee (Q \vee P), \neg Q \rightarrow \neg P, P \rightarrow (R \wedge S) \vdash S$



由於有些分枝不是封閉的，
所以這個論證為無效論證。

反例(counterexample)：

P	Q	R	S
F	T	T	F



由於出現四個open branch (當然，只要出現一個open branch就足以證明)，顯示這個論證為無效論證。

反例寫法是找到任意open branch，如果在這個open branch中出現的是proposition letter，就賦予(assign)該命題符號為真(true)，如果出現的是命題符號的否定(negation)，則賦予(assign)該命題符號為假(false)。

最後，由於R沒有出現，填true或false可以，但是一定要填。

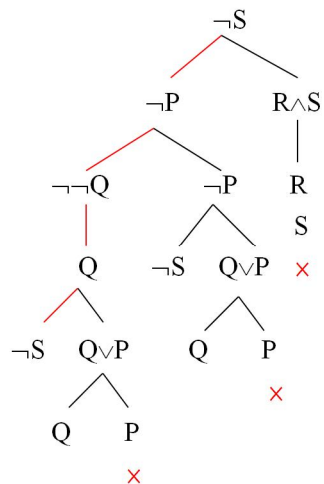
Unit 6 真值樹系統

- (d) $\neg S \vee (Q \vee P), \neg Q \rightarrow \neg P, P \rightarrow (R \wedge S) \vdash S$

$\neg S \vee (Q \vee P)$

$\neg Q \rightarrow \neg P$

$P \rightarrow (R \wedge S)$



由於有些分枝不是封閉的，
所以這個論證為無效論證。

反例(counterexample)：

P	Q	R	S
F	T	F	F

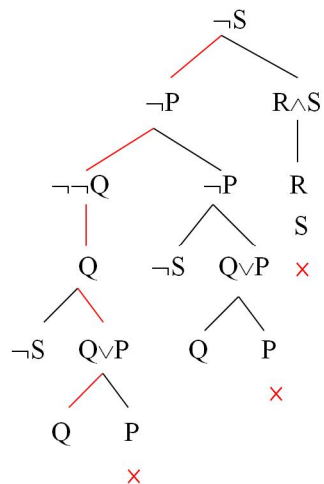
Unit 6 真值樹系統

- (d) $\neg S \vee (Q \vee P), \neg Q \rightarrow \neg P, P \rightarrow (R \wedge S) \vdash S$

$\neg S \vee (Q \vee P)$

$\neg Q \rightarrow \neg P$

$P \rightarrow (R \wedge S)$



由於有些分枝不是封閉的，
所以這個論證為無效論證。

反例(counterexample)：

P	Q	R	S
F	T	F	F

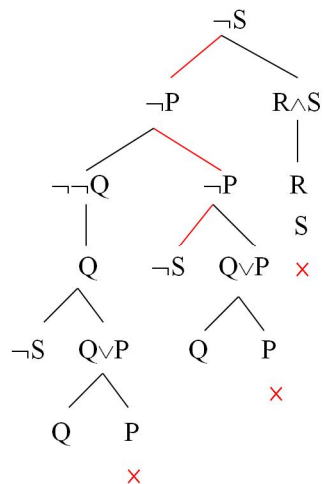
Unit 6 真值樹系統

- (d) $\neg S \vee (Q \vee P), \neg Q \rightarrow \neg P, P \rightarrow (R \wedge S) \vdash S$

$\neg S \vee (Q \vee P)$

$\neg Q \rightarrow \neg P$

$P \rightarrow (R \wedge S)$



由於有些分枝不是封閉的，
所以這個論證為無效論證。

反例(counterexample)：

P	Q	R	S
F	T	T	F

Unit 6 真值樹系統

- 從語法的觀點而言，如果沒有任何前提的句式是有效論證的話，那麼該句式就稱為「定理(theorem)」。定理的語法形式為“ $\vdash \phi$ ”。
- 另外，如果所有前提會構成封閉的真值樹，那麼這些前提就是彼此「不一致(inconsistent)」的。以 Γ 代表前提句式的集合，其語法形式為“ $\Gamma \vdash$ ”

如果從一個語句來看，

各位應該記得，在真值表中，若所有情況皆真，叫恆真句。若一formula沒有任何前提，卻成立，稱之為定理。

何謂不一致，若所有前提構成一封閉的真值樹，表示前提彼此不一致，沒有任何結構可以滿足這些語句，因此彼此不一致。

Unit 6 真值樹系統

- 對任一句式 ϕ ，可以用真值樹的方法證明 ϕ 是恆真句、矛盾句或者偶真句。
- 欲證明 ϕ 是恆真句，就以 $\neg\phi$ 為樹根運算，若得到封閉的真值樹，則句式 ϕ 為恆真句。

Unit 6 真值樹系統

- 欲證明 ϕ 是矛盾句，就直接以 ϕ 為樹根進行運算，若得到封閉的真值樹，則句式 ϕ 為矛盾句。
- 若句式 ϕ 既不是恆真句，也不是矛盾句，那麼句式 ϕ 即為偶真句。

若是偶真句，本身不封閉，negation也不封閉。

Unit 6 真值樹系統

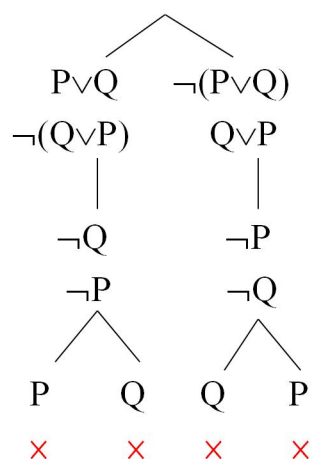
- 請用真值樹法證明下列句式何者為恆真句？何者為矛盾句？何者為偶真句？
- (e) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
- (f) $M \rightarrow (N \rightarrow M)$
- (g) $(S \rightarrow S) \rightarrow (R \wedge \neg R)$
- (h) $A \wedge \neg (B \rightarrow A)$
- (i) $(C \rightarrow D) \rightarrow C$

黑板上的語句與恆真句的形式一樣，我們說過，此種形式均為恆真句。

Unit 6 真值樹系統

- (e) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

$$\neg((P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P))$$



由於所有的分枝都是封閉的，
所以 $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$ 是恆真
句。或者，從語法的觀點而
言， $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$ 是定理，
記為 $\vdash (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

Unit 6 真值樹系統

- (f) $M \rightarrow (N \rightarrow M)$

$\neg(M \rightarrow (N \rightarrow M))$

|

M

$\neg(N \rightarrow M)$

|

N

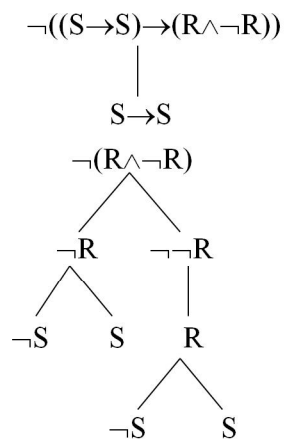
$\neg M$

×

由於所有的分枝都是封閉的，
所以 $M \rightarrow (N \rightarrow M)$ 是恆真句。
或者，從語法的觀點而言，
 $M \rightarrow (N \rightarrow M)$ 是定理，
記為 $\vdash M \rightarrow (N \rightarrow M)$

Unit 6 真值樹系統

- (g) $(S \rightarrow S) \rightarrow (R \wedge \neg R)$

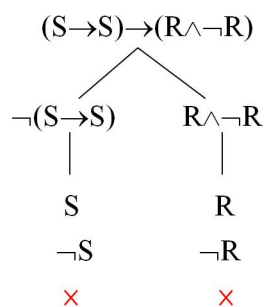


由於所有的分枝都不是封閉的，
證明 $(S \rightarrow S) \rightarrow (R \wedge \neg R)$ 不是恆真句。

非封閉的真值樹，可見非恆真句，會不會是偶真句呢？

Unit 6 真值樹系統

- (g) $(S \rightarrow S) \rightarrow (R \wedge \neg R)$

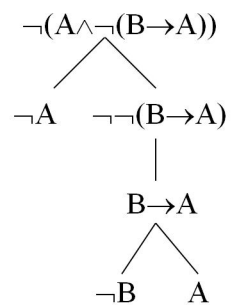


由於所有的分枝都是封閉的，
證明 $(S \rightarrow S) \rightarrow (R \wedge \neg R)$ 是矛盾句。

若用它本身來做，是封閉的，表示是矛盾句。

Unit 6 真值樹系統

- (h) $A \wedge \neg(B \rightarrow A)$



由於所有的分枝都不是封閉的，
證明 $A \wedge \neg(B \rightarrow A)$ 不是恆真句。

Unit 6 真值樹系統

- (h) $A \wedge \neg(B \rightarrow A)$

$$A \wedge \neg(B \rightarrow A)$$

$$A$$

$$\neg(B \rightarrow A)$$

$$B$$

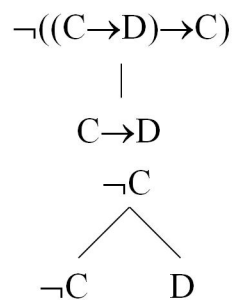
$$\neg A$$

×

由於所有的分枝都是封閉的，
證明 $A \wedge \neg(B \rightarrow A)$ 是矛盾句。

Unit 6 真值樹系統

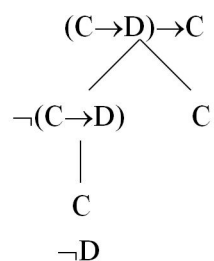
- (i) $(C \rightarrow D) \rightarrow C$



由於所有的分枝都不是封閉的，
所以 $(C \rightarrow D) \rightarrow C$ 不是恆真句。

Unit 6 真值樹系統

- (i) $(C \rightarrow D) \rightarrow C$



由於所有的分枝都不是封閉的，
證明 $(C \rightarrow D) \rightarrow C$ 不是矛盾句。
經過上述的證明， $(C \rightarrow D) \rightarrow C$
既不是恆真句，也不是矛盾句，
所以， $(C \rightarrow D) \rightarrow C$ 是偶真句。

Unit 6 真值樹系統

- 對某個句式集合 Γ 而言， Γ 是一致的，
若且唯若，至少有一個結構能夠使 Γ 中
所有的句式皆為真。
- 對某個句式集合 Γ 而言， Γ 是不一致的，
若且唯若，沒有任何結構能夠使 Γ 中所
有句式同時為真。

Unit 6 真值樹系統

- 以真值樹的方法證明一致性：
- 想要確定某個句式集合 Γ 是否一致，只要將 Γ 中所有的句式作為樹根運算，如果得到封閉的真值樹，則 Γ 是不一致的。反之，如果有任何一個分枝是開放的，那麼， Γ 就是一致的。

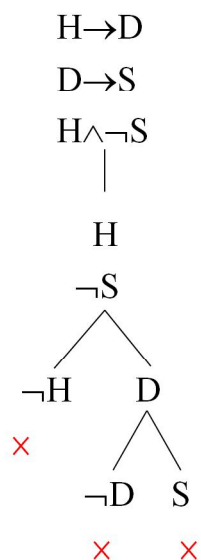
Unit 6 真值樹系統

- 以真值樹的方法證明下列各組句式是否一致？
- (j) $H \rightarrow D, D \rightarrow S, H \wedge \neg S$
- (k) $K \rightarrow (L \wedge M), \neg M \vee K, L \leftrightarrow M$
- (l) $S \leftrightarrow C, C \wedge D, \neg D \rightarrow W, W \vee S, \neg W$

這有三句話，請問這是不是一致的。提醒各位這三句話均非恆真句與矛盾句。

Unit 6 真值樹系統

- (j) $H \rightarrow D, D \rightarrow S, H \wedge \neg S$

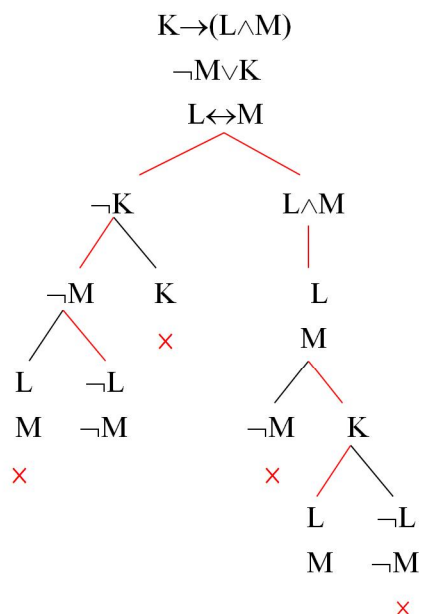


由於真值樹的所有分枝都是封閉的，因此這些句式之間是不一致的。

運算結果，得到封閉的真值樹，表示沒有任何情況使這些語句同時為真，那就表示這些語句彼此間不一致，找不到情況讓他們為真，這樣的情況就稱為不一致。

Unit 6 真值樹系統

- (k) $K \rightarrow (L \wedge M), \neg M \vee K, L \leftrightarrow M$



由於真值樹並非封閉的，
表示這些句式是一致的。
使句式集合一致的結構：

K	L	M
T	T	T
F	F	F

有open表示這些語句彼此是一致的，而且還可以找到使它一致的結構，而且不只一個。

- $$\begin{array}{c}
S \leftrightarrow C \\
C \wedge D \\
\neg D \rightarrow W \\
W \vee \neg S \\
\neg W \\
\quad C \\
\quad \quad D \\
\quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
W \quad \quad \neg S \\
\quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
\quad \quad \quad \neg D \quad W \\
\quad \quad \quad \quad \swarrow \\
\quad \quad \quad \quad D \\
\quad \quad \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
\quad \quad \quad \quad S \quad \neg S \\
\quad \quad \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
\quad \quad \quad \quad C \quad \neg C
\end{array}$$



GET
臺灣通識網

53