

Unit 5 真值表法

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示
—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

Unit 5 真值表法

- 首先，讓我們複習一下，古典邏輯的二值原則預設每個原子命題只可能出現兩個真假值：即「真」和「假」。
- 通常以「T」代表「真」，而且以「F」代表「假」。

1024-1(00022) 00:20:03

以T代表真、F代表假，也可以用1、0表示，有的書會用 $\top$ (真)、 $\perp$ (假)。
事實上有很多不同表示語意值的用法。

Unit 5 真值表法

- 因此，如果僅出現一個命題的語句，只需要考慮兩個可能情況，而出現兩個命題組成的語句，則須考慮 $2 \times 2 = 4$ 種情況。依此類推，出現 n 個命題的語句，則需要考慮 2^n 種可能情況。

1024-1(00022) 00:21:40

如果出現一個命題，我們要考慮兩種情況；如果出現兩個命題，我們要考慮四種情況。

以此類推，如果出現 N 個命題，就要考慮 2^n 種情況。

Unit 5 真值表法

- 所謂的可能情況就是原子命題的各種可能的組合，我們將每個可能情況稱為「結構(structure)」或「模型(model)」。
- 例如， P 代表「傅老師是男人」，那麼有兩個可能情況，一為傅老師是男人的世界；另一則為傅老師不是男人的世界。在第一類可能情況中， P 為真；在第二類可能情況中， P 為假。

1024-1(00022) 00:21:54

把每一個可能組合的情況稱為structure或model。

如： P 代表「傅老師是男人」，我們可以想像兩種世界，
一為傅老師是男人的世界；另一則為傅老師不是男人的世界，
傅老師不是男人並未推論出他是女人，可以是螞蟻、桌子、椅子等。
這是宇集的概念。

Unit 5 真值表法

- 如果出現兩個原子命題，例如 P 代表「傅老師是男人」，Q 代表「傅老師是好人」。那麼，會有四個結構：

P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
T	T	T	F	F	T	F	F

1024-1(00022) 00:23:51

如果有兩個命題，就會出現四種情況
 傅老師是男人且是好人；
 傅老師是男人而且不是好人；
 傅老師不是男人但是好人；
 傅老師不是男人且不是好人；

Unit 5 真值表法

- 不難想像，如果有三個原子命題，那麼就會有 8 個不同的結構：

$\frac{P \ Q \ R}{T \ T \ T}$	$\frac{P \ Q \ R}{T \ T \ F}$	$\frac{P \ Q \ R}{T \ F \ T}$	$\frac{P \ Q \ R}{T \ F \ F}$
$\frac{P \ Q \ R}{F \ T \ T}$	$\frac{P \ Q \ R}{F \ T \ F}$	$\frac{P \ Q \ R}{F \ F \ T}$	$\frac{P \ Q \ R}{F \ F \ F}$

1024-1(00022) 00:24:34

依此類推，如果有三種命題，會有八種情況。

Unit 5 真值表法

- 根據古典邏輯的外延原則，每個句式的真假值均可由原子命題的真假值決定。
- 論證是一群句式的集合，其結構則為前提與結論。
- 有效論證：不可能出現前提皆真而結論為假的情況。

1024-1(00022) 00:24:46

不可能出現『前提皆真、結論為假』，只要符合這個條件，它就是有效論證。

Unit 5 真值表法

- 實例說明：
- 考慮下列論證的語意蘊涵關係是否成立
- (a) $P \vee Q, Q \rightarrow R, \neg R \models P$
- (b) $P \vee Q, R \rightarrow Q, \neg R \models P$

1024-1(00022) 00:25:27

假設A論證成立，舉個例子，同學你覺得傅老師是好人對嗎？
假設他對老師心存怨恨，他覺得老師不是好人，他就要設計論證。

1024-2(00023) 00:00:00

或者他不願意讓老師太驕傲，所以他不會直接回答，但有那個意思在。
所以他可以說，傅老師是好人，或者傅老師是男人，如果傅老師是男人，那傅老師很帥。接下來他說，傅老師一點都不帥。
上述的說法可以推論得到傅老師是好人的結論。這個是讓思考更引人入勝，不是那麼直來直往。所以第一個可以成立的話，可以推出傅老師是好人這件事。
第二個例子，傅老師是好人或傅老師是男人，如果傅老師長得很帥，則傅老師是男人，所以他說，傅老師你一點都不帥。這樣有沒有推出傅老師是好人？我們要研究的就是這些推論是否正確。

Unit 5 真值表法：實例(a)

原子命題			前提			結論
P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \rightarrow R$	$\neg R$	P
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T	F

1024-2(00023) 00:03:24

有效論證的基本想法是，不能出現前提皆真，結論為假。
所以，如果所有情況都沒有出現前提皆真，結論為假的情況，就證明該論證為有效論證。

Unit 5 真值表法

- 觀察實例(a)的每個結構，其中能夠符合前提皆真的結構只有第四列，而第四列的結構亦使得其結論為真。因此，根據有效論證的判準，我們找不到前提皆真而結論為假的情況，所以實例(a)的蘊涵關係是成立的。

1024-2(00023) 00:06:30

如果是有效論證，在寫完真值表測驗結束後，你只要在最底下註明它是有效論證就可以了。



Unit 5 真值表法：實例(b)

原子命題			前提			結論
P	Q	R	$P \vee Q$	$R \rightarrow Q$	$\neg R$	P
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	T	T	F



1024-2(00023) 00:06:59

第一個情況前提是「真真假」，它沒有皆真，所以通過。

第二個前提是「真真真」，它前提皆真，所以我們需要去檢查結論，結論是真，所以通過。

第三個前提是「真假假」，它沒有皆真，所以通過。

第四個前提是「真真真」，它前提皆真，結論是真，所以通過。

第五個情況前提是「真真假」，它沒有皆真，所以通過。

第六個前提是「真真真」，它前提皆真，但結論是假，所以它是無效論證。

你只要找到一個情況就可以證明它是無效論證。

第七個情況前提是「假假假」，它沒有皆真，所以通過。

第八個情況前提是「假真真」，它沒有皆真，所以通過。

Unit 5 真值表法

- 觀察實例(b)的每個結構，其中第六列的結構使得前提皆真而且結論為假。因此，根據有效論證的判準，有前提皆真而結論為假的情況，所以實例(b)的蘊涵關係是不成立的。

1024-2(00023) 00:08:19

第六個情況沒有通過test，所以我們說前提與結論之間的蘊涵關係是不成立的，或者說這個論證是無效論證。

Unit 5 真值表法

- 實例(b)的蘊涵關係不成立，表示方式如下：
- $P \vee Q, R \rightarrow Q, \neg R \not\models P$
- 其反例結構為：

P	Q	R
F	T	F

1024-2(00023) 00:08:29

面對無效論證的回答方式如下：

第一個你要寫它是無效論證，然後我會要求各位將正確的sequence寫出來，劃個斜線表示這個蘊涵關係不成立。

最重要的是反例結構一定要寫，反例結構就是說明使得論證不成立的structure是什麼。

所以各位要把這個結構寫出來

P	Q	R
F	T	F

換言之，這個結構可以證明它是無效論證。

Unit 5 真值表法

- 基本練習：考慮下列論證的語意蘊涵關係是否成立
- (c) $P \rightarrow Q, P \models Q$
- (d) $P \rightarrow Q, \neg P \models \neg Q$
- (e) $P \rightarrow Q, Q \models P$
- (f) $P \rightarrow Q, \neg Q \models \neg P$

1024-3(00024) 00:04:55

如果碰到無效論證，我們在寫答案時要出現三個東西。

第一個你要寫它是無效論證，或是它的蘊涵關係不成立。

第二個你要把它正確的sequence寫出來。

第三個你要寫出它的反例。

接下來我們來做很基本的練習。

我們可以請同學來發言，你覺得哪些是有效論證，哪些是無效論證？

C是有效論證

D是無效論證

E是無效論證

F是有效論證

Unit 5 真值表法

- (c) $(P \rightarrow Q), P \models Q$

原子命題		前提		結論
P	Q	$P \rightarrow Q$	P	Q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

- 論證(c)為有效論證，即語意蘊涵關係成立。

1024-3(00024) 00:07:10

第一個情況，前提皆真，結論也是真，所以通過。
接下來，都沒有前提皆真，也通過，所以是有效論證。

Unit 5 真值表法

- (d) $P \rightarrow Q, \neg P \models \neg Q$

原子命題		前提		結論
P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

1024-3(00024) 00:08:05

第一個前提是TF沒有皆真，所以通過。

第二個前提是FF沒有皆真，所以通過。

第三個前提是TT，前提皆真，但結論為假，所以這個論證是無效論證

最後一個雖然通過，但是第三個沒有通過，所以它仍然是無效論證。

Unit 5 真值表法

- 論證(d)為無效論證，亦即語意蘊涵關係不成立：
- (d) $P \rightarrow Q, \neg P \neq \neg Q$
- 其反例結構為：

P	Q
F	T

1024-3(00024) 00:09:07

無效論證的表示法：第一步要寫這個論證是無效論證，或者寫蘊涵關係不成立，然後寫出正確的Sequence，接下來寫反例結構，能夠證明該論證是無效的可能情況，稱之為反例結構。

表示反例的時候只需要寫出一個反例結構即可。

Unit 5 真值表法

- (e) $P \rightarrow Q, Q \models P$

原子命題		前提		結論
P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	P
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

1024-3(00024) 00:09:48

這個(e)也一樣，各位可以看的出來，有一個情況前提皆真，結論為假，所以可以看的出來是無效論證。

Unit 5 真值表法

- 論證(e)為無效論證，亦即語意蘊涵關係不成立：
- (e) $P \rightarrow Q$, $Q \not\models P$
- 其反例結構為：

P	Q
F	T

1024-3(00024) 00:10:00

無效論證也一樣要寫出正確的sequence以及反例。

Unit 5 真值表法

- (f) $P \rightarrow Q, \neg Q \models \neg P$

原子命題		前提		結論
P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

- 論證(f)為有效論證，即語意蘊涵關係成立。

1024-3(00024) 00:10:11

接下來(f)，(f)證明出來只有一個情況要考慮，前提皆真，然後結論為真，所以是有效論證。

Unit 5 真值表法

- 進階練習：考慮下列論證的語意蘊涵關係是否成立
- (g) $A \wedge B, (B \vee A) \rightarrow A \models A \leftrightarrow B$
- (h) $M \vee \neg N, \neg \neg N \models N \rightarrow \neg M$
- (i) $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- (j) $(C \vee \neg C) \wedge D, \neg D \models$

1024-3(00024) 00:10:23

那我們來看看稍微複雜的例子，

Unit 5 真值表法

- (g) $A \wedge B, (B \vee A) \rightarrow A \models A \leftrightarrow B$

原子命題		前提		結論
A	B	$A \wedge B$	$(B \vee A) \rightarrow A$	$A \leftrightarrow B$
T	T	T	T T	T
T	F	F	T T	F
F	T	F	T F	F
F	F	F	F T	T

- 論證(e)為有效論證，即語意蘊涵關係成立。

1024-3(00024) 00:10:38

首先我們來看這個(g)

它是 $A \wedge B, (B \vee A) \rightarrow A \models A \leftrightarrow B$

我們來看看它是不是個有效論證，我們一樣把A列出來，它是真真假假，B是真假真假，所以 $A \wedge B$ 這個前提它是真假假假。

第二個 $B \vee A$ 我們會先做紅色的or，再做藍色這部分，接下來是結論，如果值一樣為真嘛、不一樣為假，所以是真真假真。

所以可以看到第一個test，前提皆真，結論為真，通過。

接下來第二個，很明顯看到都沒有前提為真的情況嘛，所以通過test，我們說是一個有效論證。所以你把真值表畫完後，只要註明它是有效論證就好。

Unit 5 真值表法

- (h) $M \vee \neg N, \neg \neg N \models N \rightarrow \neg M$

原子命題		前提		結論
M	N	$M \vee \neg N$	$\neg \neg N$	$N \rightarrow \neg M$
T	T	T F	T F	F F
T	F	T T	F T	T F
F	T	F F	T F	T T
F	F	T T	F T	T T

1024-3(00024) 00:12:10

第二個(h)，是不是有效論證我們來看一下，對了，還有個問題，我要交代一下。我們在列structure會有個問題，雖然比如說有四種情況會先寫兩個兩個(一組)再寫一個，但還有麻煩，就是上面的原子命題，原子命題通常有兩個方法，第一個按字母順序如A.B.C.D；第二個方法，按出現順序來命名。

比如說在這題裡，M和N會倒過來，所以各位了解我意思嗎？

有時候會字母排序比較後面的先出現，所以如果有人寫MN，有人寫NM，這樣會很困擾。所以各位比較喜歡哪一個？原則上，各位希望用哪個，我們就統一。出現的順序？好，出現(的順序)比較好，因為我怕有人會背錯字母順序。所以各位記得，各位在排列structure，請按照題目出現的順序。

那我們開始來看，這個我們先做紅色的 $\neg$ ，各位記得連接性的強度嗎？

連接性最強的是 $\neg$ ，再來 $\vee$ 、 $\wedge$ ，再來是 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 。所以如果沒用括號要先做 $\neg$ 再做 $\vee$ ，如果各位很厲害會發現，兩個 $\neg N$ 會相當於它自己，比如：我不是不愛你，跟我愛你是一樣的。不過各位在講時候不要激動，激動就會口吃，

「我不是不不不不不.....愛你」這樣就要去數到底是奇數還偶數。

所以這個，當然最後就是N啦，TFTF，然後這個是一樣先做M，所以是FFTT，然後Conditional，小心前面是N，後面要紅色這個，所以原則上做出來後再去做TEST，藍色是最後結果，第一個，前提皆真，這兩個藍色是真、結論是假，所以這個structure剛好是反例。所以如果要test它是不是個有效論證，這裡就可以證明了嘛，答案它就是個無效論證。

Unit 5 真值表法

- 論證(h)為無效論證，亦即語意蘊涵關係不成立：
- (h) $M \vee \neg N, \neg \neg N \not\models N \rightarrow \neg M$
- 其反例結構為：

M	N
T	T

1024-3(00024) 00:18:42

所以它是個無效論證，反例結構只要寫一個就夠了，道理是我們講一個人做錯，只要講一件事就好，一直講最後會變得不理性。你要讓人維持在理性的狀態下，他比較容易認錯。

Unit 5 真值表法

- (i) $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

原子命題		前提	結論
P	Q		$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
T	T		T T
T	F		T T
F	T		T F
F	F		T T

- 論證(i)為有效論證，即語意蘊涵關係成立。

1024-3(00024) 00:20:39

這個sequence少了前提，如果沒有前提，你就可以假設任何情況，也就是可以假設所有前提皆真，這樣的情況結論就變得很重要，所以你只要發現結論有假，該論證就不成立，也就是說這個論證是無效論證。

不過，在這裡出現的是結論在任何情況下都為真，表示加入任何前提，也不影響它是有效論證的結果。

Unit 5 真值表法

- (j) $(C \vee \neg C) \wedge D, \neg D \models$

原子命題		前提		結論
C	D	$((C \vee \neg C) \wedge D)$	$\neg D$	
T	T	T F T	F	
T	F	T F F	T	
F	T	T T T	F	
F	F	T T F	T	

- 論證(j)為有效論證，即語意蘊涵關係成立。

1024-3(00024) 00:24:09

接下來，這個少了結論，表示寫什麼都可以。

那可以想像結論都是假，要看是否為有效論證，就是看前提是否都為真，如果有出現前提皆真的情況之下，表示可能會出現前提皆真、結論為假，那麼這個論證就是一個無效論證。反之，如果在這個test裡面沒有出現前提皆真的情況，那就表示這個論證是一個有效論證。

第一個我們把他帶進來藍色的部分最後是TFTF，這個是FTFT。

所以你會發現這個連前提皆真的情況都沒有，更不用說會出現前提皆真、結論為假的情況。

所以這個論證顯然是一個有效論證。

Unit 5 真值表法

- 真值表法的重要性在於提供一個決定命題邏輯論證有效與否的程序。
- 不過，真值表法的缺點在於如果命題符號的個數過多，那麼真值表法則顯得過分繁複。
- 因此，我們需要一個比較簡單的方法——簡易真值表法(short-cut)

1024-3(00024) 00:25:40

真值表在於提供一個有效的機械式程序，這個程序保證在任何命題邏輯或語句邏輯的論證，你都可以用真值表法證明是該論證是有效或無效論證。

因為我們通常把邏輯的特性稱之為**Decidable**可被決定的，所以如果我們找到一個方法，可證明所有論證是有效或是無效，那這個我們稱之為可決定的。

在真值表法前，想要證明某個論證，多少需要依靠一些天分來證明。然而真值表法在20世紀初才出現，所以20世紀以前的邏輯學家並沒有這些的機械程序可以用來證明。

但是，真值表法也不是那麼完美，如果原子命題有兩個，我們可以輕易地畫出真值表，但是，如果原子命題有十個呢？那我們顯然要考慮1024個情況。

所以，真值表雖然是一個機械性的程序，也可以讓我們證明論證是否有效，但是其缺點在於太過繁複了。

1024-4(00025) 00:00:00

所以邏輯學家找到了捷徑。

Unit 5 真值表法

- 簡易真值表法的操作方法：
- (1) 先假設給定的論證是無效論證，也就是假設前提皆真而結論為假。
- (2) 如果上述的假設會導致矛盾出現，那麼該論證即為有效論證。如果沒有矛盾出現，意思就是至少有一個結構可以使得前提皆真而結論為假，亦即該論證為無效論證。

1024-4(00025) 00:00:33

假設我要證明林先生是好人，那就麻煩了，要一個個列出來，但假設我說林先生是壞人，只要找到他做的一件壞事就好。所以我們準備要怎麼做？我們假設林先生是壞人，也就是我們先去看他有沒有做過任何壞事，如果找不到，我們大概就相信他是好人。**Short-cut**也是這個意思，找到反例。

先假設前提皆真，結論為假，假設完再去檢驗，如果這樣的假設會出現矛盾，就代表我假設該論證是無效論證是錯的。但如果沒有矛盾出現，就表示我可以找到一個情況讓這個論證的前提皆真，結論為假，也就是無效論證。

Unit 5 真值表法

- 實例說明：
- (k) $P \vee Q, Q \rightarrow R, \neg R \models P$
- (l) $P \vee Q, R \rightarrow Q, \neg R \models P$
- (m) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg P \models \neg P$
- (n) $P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q \models \neg Q$
- (o) $(P \wedge Q) \rightarrow R \models P \rightarrow R$

1024-4(00025) 00:05:17

我們來看這些例子

Unit 5 真值表法

- (k) $P \vee Q, Q \rightarrow R, \neg R \models P$

$P \vee Q$		$Q \rightarrow R$		$\neg R$	P
↓	T	↓	T	↓	F
↓	↓	↓	↓	F	
T	F	F	F		

矛盾

- 假設前提皆真且結論為假會產生矛盾，所以上述論證為有效論證。

1024-4(00025) 00:05:33

首先各位要把前提寫出來。

第一步假設所有前提皆真，結論為假。假設完後根據你的假設去做運算，如何運算呢？R為真，表示R為假，再來，如果R(第二個)為假，表示Q為假(第二個)。Q為假， $P \vee Q$ 要為真，唯一的情況P要為真，所以是矛盾。

表示矛盾的話，你剛假設前提皆真、結論為假，結果出現矛盾，表示假設不成立，所以是有效論證。

Unit 5 真值表法

- (1) $P \vee Q, R \rightarrow Q, \neg R \models P$

$P \vee Q$		$R \rightarrow Q$		$\neg R$	P
	T		T	T	F
↓	↓	↓	↓	↓	
F	T	F	T	F	

- 假設前提皆真結論為假不會得到矛盾，因此上述論證是無效論證。
- 反例結構(counterexample)：

P	Q	R
F	T	F



1024-4(00025) 00:09:50

第二個例子一樣，我們先假設前提皆真，結論為假，然後運算。

$\neg R$ 是真， R 就是假， Q 可以是真或假，那就先寫 R 為假， Q 為真，可以配合後面 P 為假，發現這樣沒有矛盾，表示這個論證允許前提皆真、結論為假的情況，所以是無效論證。

所以各位要把counterexample寫出來，反例結構就是這個沒有矛盾的情況。

Unit 5 真值表法

- (m) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg P \models \neg P$

$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow \neg P$	$\neg P$
$\downarrow$ T	$\downarrow$ T	$\downarrow$ F
T	F	T
T	F	
F	F	

矛盾

- 假設前提皆真而結論為假會產生矛盾，所以為有效論證。

1024-4(00025) 00:12:20

第一步假設前提皆真，結論為假。

從最容易做的開始，舉個例子，有個人會有順序的偏執，他一定要從第一個開始做，那他就會遇到 $P \rightarrow Q$ 為真，有三種情況。

所以從唯一決定的開始，非必要不要分開。

最簡單的 $\neg P$ 為假，所以 P 為真。 $Q \rightarrow \neg P$ 要為真，所以 Q 為假，那 $P \rightarrow Q$ 為真，所以 Q 要為真，所以這個假設會導致矛盾。既然假設前提皆真結論為假會導致矛盾，亦即證明前提皆真而結論為假是不成立，所以該論證是有效論證。

Unit 5 真值表法

- (n) $P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q \models \neg Q$

$P \rightarrow Q$		$P \leftrightarrow Q$		$\neg Q$	
	T		T	F	
↓	↓	↓	↓	↓	
T	T	T	T	T	

- 假設前提皆真且結論為假不會導致矛盾，所以上述論證為無效論證。

- 反例結構：

P	Q
T	T

Unit 5 真值表法

- (o) $(P \wedge Q) \rightarrow R \models P \rightarrow R$

$(P \wedge Q) \rightarrow R$			$P \rightarrow R$	
↓	↓	T	↓	F
↓	↓	↓	T	F
T	F	F		

- 假設前提皆真且結論為假不會導致矛盾，所以上述論證為無效論證。

- 反例結構：

P	Q	R
T	F	F

Unit 5 真值表法

- 函映完備性(functionally complete)
- 對某真值函映連接詞所形成的集合 Λ 而言，如果任意 n 元真值函映均可以用集合 Λ 中的真值函映連接詞定義，那麼集合 Λ 即具有函映完備性的性質。

MP4-1031 00:08:25

根據functionally complete，因為只是用到他，我們不做任何證明，只說明性質。原則上，我們其實在這裡看到的一個狀態是很難理解 φ ，這個語句的函映並不是一個二元的連接詞，是三元的連接詞，用來連接三個語句，分別是 P 、 Q 、 R ，大致上可以寫成這樣 $\#(P, Q, R)$ ，有沒有一個方法，去定義三元連接詞的方法，而且定義從二元連接詞來，對邏輯學家要證明所有 n 元的真值函映連接詞都可以用二元的真值函映連接詞去定義。

只談真值函映(INPUT真假值，OUTPUT一定會有真假值)，非真值函映不在討論範圍。證明說：能不能用有限的二元的真值函映去定義 n 元的連接詞，這樣的證明稱為函映的完備性

Unit 5 真值表法

- 具備函映完備性的連接詞集合
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 、 $\{\neg, \rightarrow\}$ 、 $\{\neg, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \vee\}$
- $\{\uparrow\}$ 、 $\{\downarrow\}$

MP4-1031 00:11:44

第一個，我們在介紹命題語言時提到五個連接詞，事實上，用這五個連接詞就可以用來定義所有 n 元真值函映的連接詞。

我們的conditional其實可以用 $\neg$ 或者是 $\vee$ 來定義，也就是我們的 P 則 Q 其實可以換成 $\neg P \vee Q$ 。所以conditional是可以不要的。

我們equipollent的符號那個其實也可以用conditional來定義，就是 $P \leftrightarrow Q$ 可以定義成 P 則 Q and Q 則 P ，所以後面兩個符號其實是可以被定義的。因此我們會有底下 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ，他也是functionally complete的連接詞。邏輯學家覺得既然三個可以，那兩個行不行？結果發現也可以，所以我們會有 $\{\neg, \rightarrow\}$ 、 $\{\neg, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \vee\}$ 。那既然兩個可以，那一個行不行？

我們有沒有可能用一個連接詞去定義所有真值成立的連接詞？

結果發現也是可以的，所以我們會有兩個有趣的符號 $\{\uparrow\}$ 、 $\{\downarrow\}$ 。

我們可以用這兩個符號來證明所有的語句，定義所有的連接詞。

邏輯系統跟其他東西一樣，你在某一方面變簡單，你要付出的代價就是在另外一方面會變困難。比如說，我們用的連接詞越少，我們語句的長度就會越長。以我過去所做過的問卷統計結果，通常理工農醫的同學會喜歡用連接詞少、語句較長的方式，而文法商管理的同學通常會用喜歡連接詞多、語句較短的方式，當然這不是一定的。連接詞越多就需要越多的證明，因此從證明的簡潔性來講，1個連接詞在證明上他是佔便宜的，可是他在表達上是吃虧的。這樣的思考能力他會延伸到你的日常生活。

比如說，有些同學在跟你講話的時候，他會很簡短、不浪費時間的跟你表達他的意思，但相對日後付出的代價卻是比較大的。在科學裡面有個非常重要的性質叫做簡單性，我來畫圖解釋給各位聽。

接下來我們要用函映的完備性的性質來解決下面的問題。

Unit 5 真值表法

- DNF 與 CNF
- 到目前為止，我們已經知道如何利用真值表決定語句的真假值。接下來，我們要挑戰的問題是：是否可以經由真值表決定語句？

MP4-1031 00:22:04

我們接下來要解決的問題是，我們如何運用一個真值表來找出和 ϕ 等值的語句？第一個方法我們稱為DNF，另外一個稱為CNF。他的想法大概是這樣，我們現在要找這個語句有兩個方向。

Unit 5 真值表法

- DNF: 選言標準形式(Disjunctive Normal Form)
- 定義：某句式被稱為選言標準形式，若且唯若，此句式是由連言作為選言項(disjunct)所組合而成的選言，連言中的連言項均為準原子句式。

MP4-1031 00:22:39

第一個方向是說，我們怎麼去組織一個真的語句，並且告訴別人這句話一定就是這個真值表所要表達的意思？

DNF是由真的情況去組織。而CNF剛好相反，他是由假的方向去組織。

他的基本構想大概是這樣。

假設我給你這樣一個真值表，你如要去組織這句話要表達的東西？

想法上大概是這樣，我們只要看到這個為真的情況，

那這些為真的情況在告訴我們一件事， ϕ 這個語句必須要在第一、二、四情況裡面為真，可是碰到第三個情況必須為假。

所以我們在組織這個語句的時候，我們的想法就是，把所有為真的情況找出來。

我們要讓第一、二、四情況帶進去為真，所以我們就是用Disjunction的方式把它連接起來。

Disjunction的條件是，只要有一個為真，整句話就為真。

意思就是，只要一、二、四情況帶進去其中一個為真，他整個句子就為真。

我們在找DNF的時候，我們把在Disjunction兩邊的，我們就分別稱為disjunct。

那在這個disjunct裡面，他會是個conjunction，這個conjunction是用來描述這個情況的意思是什麼。

這個conjunction裡面，他的conjunct都是quasi-atomic formula。

Unit 5 真值表法

- 準原子句式
- 定義：某句式稱為準原子句式，若且唯若，該句式是原子命題或者是只包含一個否定號的原子命題。
- (1) $P, Q, \neg P, \neg Q$ 等是準原子句式。
- (2) $\neg\neg P, P \rightarrow P, P \vee Q$ 等不是準原子句式。

MP4-1031 00:26:41

什麼是quasi-atomic formula呢？

他如果是quasi-atomic formula的話，這個formula本身一定是一個原子命題，或只是只有加一個negation的符號。

所以像 $P, Q, \neg P, \neg Q$ 這些都是quasi-atomic formula。

像 $\neg\neg P, P \rightarrow P, P \vee Q$ 這些都不是quasi-atomic formula。

Unit 5 真值表法

- 考慮真值表中的某個可能情況，以原子命題或其否定組合描述該狀態為真，稱之為狀態描述。

P	Q	組合的狀態描述
T	T	$P \wedge Q$
T	F	$P \wedge \neg Q$
F	T	$\neg P \wedge Q$
F	F	$\neg P \wedge \neg Q$

MP4-1031 00:27:34

接下來我們要如何把這個的DNF找出來呢？

我們先把那些狀態描述先把他確定下來，他的狀態是這樣。

第一個情況是P為真Q為真，也就是 $P \wedge Q$ 是成立的。

如果P代表傅老師是好人，Q代表傅老師是男人，

那在第一個事件發生什麼事？就是傅老師是好人且傅老師是男人。

第二個情況是P為真Q為假，就是在那個事件裡面，傅老師是好人，但傅老師不是男人。

那第三個事件P為假Q為真，在那個情況裡面，傅老師不是好人，但傅老師是男人。

他在描述這個事件、情況的樣子是什麼，P跟Q真假的樣子是什麼。

Unit 5 真值表法

- 決定 DNF 的程序
- 藉由狀態描述的觀念，我們可以輕易地找出以該真值表描述的 DNF。
- 將真值表中出現「T」的狀態描述以選言的方式連接，就是我們所需要的 DNF。

MP4-1031 00:29:54

決定DNF的程序，
第一個我們先把狀態描述確定好，確定好之後，
我們只要把出現真的狀態利用disjunction的方式把它連接起來，就是我們要的
formula。
我們來稍微做一下練習。

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(1)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	ϕ
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

MP4-1031 00:30:22

首先我們來看這個真值表，我們要把 ϕ 找出來。
有同學剛剛很快地找出 ϕ 是 $\neg P \rightarrow \neg Q$ 或是 $Q \rightarrow P$ 。

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，不難發現實例(1)的句式 ϕ 其實就是 $Q \rightarrow P$ 。
- 句式 ϕ 的 DNF 則寫成下列形式：

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

MP4-1031 00:30:45

我們其實可以怎麼做呢？

我們做出來是 $Q \rightarrow P$ ，我們的 DNF 就是，把剛剛為真部分的 state 用 disjunction 的方式把它連接起來。為了讓各位同學更熟悉一點，我們再帶各位做一次練習。

第一步要先找有幾個為真的情況，有三個情況第 1、2、4 我們把它圈起來，然後我們用 disjunction 的方式把它連接起來。

接下來第二步，這裡有兩個命題符號，他需要有兩個位置來填那些 formula，所以我們在這裡做 conjunction 是這樣。

第三步的做法，我們把這些情況裡面如果出現是真，我們就把命題符號寫上去；如果他出現的是假，我們就寫上 negation。

第一個情況是 P 真 Q 真，所以是 $(P \wedge Q)$ 。

第二個情況是 P 真 Q 假，所以是 $(P \wedge \neg Q)$ 。

第四個情況是 P 假 Q 假，所以是 $(\neg P \wedge \neg Q)$ 。

這樣我們就完成了一個 DNF，我們就找到了這個 normal form，而這個語句就是跟若 Q 則 P 是等值的語句。

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(2)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	ϕ
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

MP4-1031 00:36:51

這裡有兩個state是真，所以我們把這兩個找出來。

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，不難發現實例(2)的句式 ϕ 其實就是 $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 。
- 句式 ϕ 的 DNF 則寫成下列形式：

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

MP4-1031 00:36:57

我們用DNF的方式，
所以我們只要把那兩個state寫出來，就是 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 。

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(3)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	ϕ
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

MP4-1031 00:37:14

這個例子既然四個都是真，那就全部把它寫下來。

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，不難發現實例(3)的句式 ϕ 其實就是套套句，因此可以寫成 $P \rightarrow P$ 或 $P \vee \neg P$ 等等。
- 句式 ϕ 的 DNF 則寫成下列形式：
 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

MP4-1031 00:37:37

他的DNF就是：

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(4)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	ϕ
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

MP4-1031 00:37:52

那如果沒有為真的情況怎麼辦？

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，不難發現實例(4)的句式 ϕ 其實就是矛盾句，因此可以寫成 $\neg(P \rightarrow P)$ 或 $P \wedge \neg P$ 等等。
- 由於沒有任何一個狀態使得句式 ϕ 為真，所以我們無法挑出任何狀態描述構成句式 ϕ 的DNF。

MP4-1031 00:38:30

既然是這樣就沒有DNF，
你沒有任何為真的狀態可以描述，所以你就找不到相對應的DNF。

Unit 5 真值表法

P	Q	R	組合狀態描述
T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$
T	T	F	$P \wedge Q \wedge \neg R$
T	F	T	$P \wedge \neg Q \wedge R$
T	F	F	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
F	T	T	$\neg P \wedge Q \wedge R$
F	T	F	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
F	F	T	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$
F	F	F	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

MP4-1031 00:38:54

如果碰到三個的時候怎麼辦？

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(5)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	R	ϕ
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

MP4-1031 00:39:01

我們直接來看例子。

第一步一樣，把所有為真的情況找出來，總共有三種情況為真。

如果為真我們就填原本的命題，如果為假我們就填他的negation。

所以我們得到的DNF就是： $(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

你用這個方式，不管它是幾元的真值函映數，你都可以用相同的方法把他的等值語句找出來。

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(5)
- 當連接詞符號代表的函映關係超過二元時，我們就無法直接以命題邏輯既有的語意規則直接找到符合該真值表的句式 φ 。
- 不過，透過決定 DNF 的程序，我們可以找到等值句式 φ 的 DNF 。

Unit 5 真值表法

- 實例(5)句式 ϕ 的 DNF 為下列形式：
- $(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(6)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	R	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

MP4-1031 00:42:46

我給各位10秒鐘來練習這個題目。

Unit 5 真值表法

- 實例(6)句式 ϕ 的 DNF 為下列形式：
- $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

MP4-1031 00:43:48

在走到CNF之前，我想跟各位說明一下這件事。

Unit 5 真值表法

- DNF 的實例(7)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	R	ϕ
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

MP4-1031 00:43:56

如果真值表出現的情況都是F的情況，根據我們剛剛講法是什麼？沒有相對應的DNF對吧。

可是那個 ϕ 我們會不會知道？雖然我們知道他沒有相對應的DNF，可是那個 ϕ 我們隨便寫一個contradiction進去就可以了。

現在問題來了。

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，實例(7)的句式就是矛盾句，因此可以用 $\neg(P \rightarrow P)$ 、 $\neg(Q \rightarrow Q)$ 、 $\neg(R \rightarrow R)$ 的形式，或者 $P \wedge \neg P$ 、 $Q \wedge \neg Q$ 、 $R \wedge \neg R$ 等表示句式。
- 想想看，語句符號 S 並未出現在真值表的原子語句中，那麼可以用、 $\neg(S \rightarrow S)$ 或 $S \wedge \neg S$ 表達句式 ϕ 嗎？

MP4-1031 00:44:26

我們如果隨便寫一個contradiction進去會發生這樣的一個情況，我們可以寫成 $\neg(P \rightarrow P)$ 、 $\neg(Q \rightarrow Q)$ 、 $\neg(R \rightarrow R)$ 、 $P \wedge \neg P$ 、 $Q \wedge \neg Q$ 、 $R \wedge \neg R$ ，這些都可以對吧？那如果我們出了這樣一個題目，結果有位同學認為寫成 $S \wedge \neg S$ 可以嗎？

請問各位，他這樣的想法是正確的嗎？

同學A：「可以，因為符合它是矛盾句。」非常好的理由，因為它本身已經是矛盾句了。

同學B：「倒回去寫真值表。」倒回去寫真值表怎麼寫出來？

C同學找了一個非常好的方法，我們就不要看 S ，就隨使用 P 或 Q 帶進 S 的位置就好，不要把它當一個formula，把它當作是一個可以取代樣子就可以了。B同學他的回應你接受嗎？

還是不行？沒關係，我來幫你解釋一下。在這個真值表裡面沒有出現 S 這個原子命題，所以我們會說 S 在這個真值表裡面的地位是undefined。

所以他如果沒有出現就會像B同學講的一樣，他其實是undefined。

那C同學講的對不對？好像也蠻符合我們直覺的。所以其實在這裡他會有不同的觀點，並沒有說哪個對哪個錯。

Unit 5 真值表法

- CNF: 連言標準形式(Conjunctive Normal Form)
- 定義：某句式被稱為連言標準形式，若且唯若，此句式是由選言作為連言項(conjunct)所組合而成的連言，選言中的選言項均為準原子句式。

MP4-1031 00:50:08

接下來我們走入CNF。

DNF是要從什麼情況為真來組織DNF，而CNF剛好相反，是我們要從什麼情況為假去組織CNF。

如果你要從假來組織，全部conjunction只要有一個為假，那麼整句話最後得到的真假值就是假。

其實CNF做的方式跟DNF差不多，只是從另一個方向來考慮。

Unit 5 真值表法

- 在真值表中的某行，以原子命題或其否定組合描述該狀態為假，稱之為狀態描述。

P	Q	組合狀態描述
T	T	$\neg P \vee \neg Q$
T	F	$\neg P \vee Q$
F	T	$P \vee \neg Q$
F	F	$P \vee Q$

MP4-1031 00:52:07

CNF和DNF的差別在於狀態描述，剛剛是用conjunction的方式，那我們現在要組織假的部分。

第一個情況是P真Q真，那麼這個state什麼時候為假？只要其中一個為假就可以，所以是 $\neg P \vee \neg Q$ 。

Unit 5 真值表法

- 決定 CNF 的程序
- 藉由狀態描述的觀念，我們可以輕易地找出以該真值表描述的 CNF。
- 將真值表中出現「F」的狀態描述以連言的方式連接，就是我們所需要的 CNF。

MP4-1031 00:52:47

我們先把出現F的情況找出來，然後把所有F的情況用conjunction的方式連接起來，就是我們要的CNF。

Unit 5 真值表法

- CNF 的實例(1)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	ϕ
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

MP4-1031 00:53:14

這個例子只有一個情況為假，不要懷疑那個組合狀態描述就是我們要的CNF。

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，實例(1)
 ϕ 的句式其實就是 $Q \rightarrow P$ 。
- 句式 ϕ 的CNF 為：
 $(P \vee \neg Q)$

MP4-1031 00:53:31

所以與 ϕ 等值的CNF就是 $(P \vee \neg Q)$ 。

Unit 5 真值表法

- CNF 的實例(2)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	ϕ
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

MP4-1031 00:53:50

第一、四個情況為F。

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，我們會發現實例(2)的句式 φ 其實就是 $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 。
- 句式 φ 的CNF 為：
$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$

MP4-1031 00:54:05

所以與 φ 等值的CNF是 $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$ 。

Unit 5 真值表法

P	Q	R	組合狀態描述
T	T	T	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$
T	T	F	$\neg P \vee \neg Q \vee R$
T	F	T	$\neg P \vee Q \vee \neg R$
T	F	F	$\neg P \vee Q \vee R$
F	T	T	$P \vee \neg Q \vee \neg R$
F	T	F	$P \vee \neg Q \vee R$
F	F	T	$P \vee Q \vee \neg R$
F	F	F	$P \vee Q \vee R$

Unit 5 真值表法

- CNF 的實例(3)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	R	ϕ
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

MP4-1031 00:54:05

同樣的，如果是三個的，我再帶各位練習一下。

分別有五個F的情況，所以會需要有五個conjunct，這五個conjunct裡面分別都是一個disjunction，他現在要組織的是使他為假的情況，所以我們要放的方式是，如果這個命題符號在這個情況裡面本身就是假，那就直接寫上去。

那如果他是為真的，我們就要放他的negation，跟剛剛DNF的方式剛好相反對吧。

所以第一個情況是($\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$)

第四個情況是($\neg P \vee \neg Q \vee R$)

第五個情況是($P \vee \neg Q \vee \neg R$)

第七個情況是($P \vee Q \vee \neg R$)

第八個情況是($P \vee Q \vee R$)

這樣就完成我們所需要的CNF。

Unit 5 真值表法

- 根據實例(3)的真值表，等值於句式 φ 的 CNF 為：
- $(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

MP4-1031 00:57:14

所以基本上我們可以用這樣的方式解決的一個重要關鍵就是，我們不單單可以用真值表來決定這句話是什麼意思，我們也可以倒過來用真值表來決定這個語句是什麼。

各位如果回去看第五單元的練習，會看到這樣一個題目： $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

我們要找出他相對應的 DNF 和 CNF，那我們應該要怎麼做？

第一步先把他的真值表寫出來，再利用剛剛我們寫 DNF 跟 CNF 的方法把他找出來，那個就是與他等值的 DNF 跟 CNF。

Unit 5 真值表法

- CNF 的實例(4)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	R	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

Unit 5 真值表法

- 根據實例(4)的真值表，等值於句式 φ 的 CNF 為：
- $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

Unit 5 真值表法

- CNF 的實例(5)，假設某個真值表如下表所列：

P	Q	R	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

MP4-1031 00:58:52

那這題的CNF怎麼辦？

沒錯，他沒有的CNF。

基本上這樣的情況你會發現，根本寫不出任何相對應的CNF，
那很簡單，你就寫沒有相對應CNF。

Unit 5 真值表法

- 根據命題邏輯的語意規則，實例(5) 句式 φ 是套套句，可以 $P \rightarrow P$ 、 $Q \rightarrow Q$ 、 $R \rightarrow R$ 或 $P \vee \neg P$ 、 $Q \vee \neg Q$ 、 $R \vee \neg R$ 等表達，這些句式均為句式 φ 的等值句式。
- 由於沒有任何一個狀態使得句式 φ 為假，所以沒有等值於句式 φ 的 CNF。