

# Unit 4

## 語意學基本預設及語句連接詞

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示  
—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 語意學的基本概念就是解釋某個語言中的語詞及語句的意義。
- 從單稱語詞(singular terms)來看，指涉對象就是其語意值。

語意學要解釋所用的符號、語句的意義。

單稱語詞，如「傅皓政」所指為何？說話是為了表達，想表達「什麼」，請問我們所用的語言與這世界的關係為何？比如「傅皓政」這個名稱用來指這個東西(師指自己)；「台灣總統」用來指那個東西，就是有個東西是台灣總統；或者說「台大校長」也是用來指一個東西。若把我們的語言當成一個function(方程式)，語言中某一語詞(proper name)或是singular term，這個符號的semantic value對應出去的那個東西，就是這世界上的某個東西。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 通稱語詞(**general terms**)的語意值就是具有該語詞描述的性質的對象形成的集合(即外延)。
- 語句的語意值則為真假值(**truth-value**)。

何謂通稱語詞，比如老虎、獅子、梅花鹿、人、男人、女人，這些為通稱，所指非單一對象。比如同學說：「所有的人都很自私。」意思是說有一個集合由人組合，這個集合的人有一共同特性-自私，這個「人」非單一對象，是一集合。有這個性質的對象所形成的集合稱之為**semantic value**。

語句的**semantic value**是它的真假值。也就是說我們在乎的是它的**extension**，而不是它的**intension**。一句話會有兩個層面-內容或意義、真假。為了避免陷入日常語言的爭議，句子裡面的意思我們不管，給它一個**P**的稱呼，不管內容是：傅老師是女人、男人、好人或壞人都可以，我們不關心**P**的內容，只關心它的真假值，這是它的**semantic value**。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 語意學預設：
- (a) 二值原則，命題具有真假值(也就是命題為真，或者為假)，但不能既真又假，也不能既不真也不假。

二值原則指的是每一命題、語句僅有為真或為假，不可能既真又假或既不真又不假。

既真又假或既不真又不假句的例子：S：S is false. S是一句話，S是假的。請問S是真還假？S若是假，那S講的便是真；S若是真，那S講的便是假。另一位同學說：S是不真不假。

對我們來說這是很難解決的問題，因為我們有一原則，就一句話不可能既真又假或既不真又不假。若是如此，就無法運算。因此，在古典邏輯裡，有一基本預設：所有句子只能是真或假。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 對於二值原則的思考：
- 什麼語句無法給出確定的真假值？
- (i) 明天將會發生海戰。
- (ii) 大衛是勇敢的。

我們來想想看什麼樣的句子不能確定真假，除了剛剛的例子，還有什麼例子？

第一句話是否有真假值？這句話沒有確定，跟可能性相關，若我說：明天必然會如何...。這樣的宣稱有點奇怪，不見得會發生。

第二句話，先不論它的真假，各位會不會覺得它一定有真假，也許我現在不知道，但我一定可以證明。這句話難在何處？萬一大衛是出生一天就夭折的嬰兒，來不及長大證明他是勇敢的，那這句話要證明它的真假很困難。

所以有些句子的真假值是無法確定的，為了這樣的問題，我們有不同的邏輯系統來處理，但在這堂課無法介紹到，比如第一句，用模態邏輯處理，比如有 **necessary**、**it's possible that**，這類的句子，第二類用直覺邏輯處理。基本上就是，若不承認二值原則，那就要採用其他邏輯系統。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (b)真值函映原則，在古典邏輯中出現的語句連接詞均為真值函映的连接詞。
- 例如，當P為真，Q為真時， $P \wedge Q$ 顯然為真。而當P和Q兩者有任一為假的時候，則 $P \wedge Q$ 顯然為假。因此，连接詞“ $\wedge$ ”為真值函映的连接詞。

真值函映指的是input都有真假值，output也都有真假值，不能input有真假值，output沒有真假值，這目前不在這邏輯系統討論。

比如：若有個男生對某位女生說：我是既英俊又有錢。這女生嫁給了他，結果發現他一文不名，她說：「你騙我。」男生說：「我只是說P and Q，P真Q假，結果是假，你沒有注意而已，我沒說它一定真，後面的為假我還沒來得及說。」請問各位在日常生活中這樣可以接受嗎？一定不行。在日常生活中，我們都預設對方講真話，不會說後面為假沒說，這樣是不合理的。若說既英俊又有錢，一定兩個都為真。這樣能用真假運算思考稱之為真值函映。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 非真值函映的連接詞
- 例一：I know that P
- 當“P”為真的時候，“我知道 P”可能真也可能假，因為我不會知道所有真的語句。不過，當“P”為假的時候，“我知道 P”為假。



如果你告訴別人說：「我知道臺大在公館。」這句話很合理，因為臺大真的在公館，但若我說：「我知道臺大在玉山上。」這樣講就不合理，因為不是為真的事實，就不能用「知道」這個字眼。另一個例子，古希臘人認為大地是平的，若你生活在古希臘，你會說：「我知道大地是平的。」為什麼？因為他認為大地真的是平的，今日，你還會說：「希臘人知道大地是平的」嗎？不會吧。現在會說：「他們以為，他們誤認為，或者他們相信。」就不會再用知道這個字眼，知道蘊含P一定是真的。所以我從我知道P，推出P一定是真的。但反過來，P是真的，不能推出我知道P是真的或假的。當input P是真的，output I know that P就不知是真或假，這叫 non-truth function operator(非真值函映)。也就是說，真值函映的意思就是輸入的語句有真假值，輸出的語句也會有真假值。



## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 非真值函映的連接詞
- 例二：It is necessary (possible) that P
- 當“P”為真的時候，“必然 P”可能真也可能假；另外，當“P”為假的時候，“可能 P”也是可能真或者為假。

傅老師是男人，是真。傅老師必然是男人，真還假？這就有爭議了，因我只是偶然的變成男人，我有可能變成女人，只要往回推，當時如何如何，那就是女人了。是男人，不代表必然是男人，所以從P為真無法推出 It is necessary P的真假值，因此，這類語句函映稱為 non-truth function operator。



## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (c)外延原則，複合語句的真假值是由原子語句的真假值決定，與語句本身的內容或意義無關。
- 以矛盾句為例， $P \wedge \neg P$ 的真假值一定為假，無論  $P$  的內容為何。

外延原則指的是所有formula都是由它的個別部分決定的。與intension無關。以矛盾句來看，比如傅老師是男人，而且同時傅老師不是男人。這句話是矛盾。如果想用也許那時不男不女的，但這違反第一個原則：每一句要有確定真假值。在這邏輯系統中，一定要有確定真假值。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 根據二值原則，每個命題可能出現的情況有兩種，即「真」與「假」。因此，如果僅出現一個命題的語句，只需要考慮兩個可能情況，而出現兩個命題組成的語句，則須考慮 $2 \times 2 = 4$ 種情況。依此類推，出現  $n$  個命題的語句，則需要考慮  $2^n$  種可能情況。

任意一語句必有真假。一語句有真假二情況，若有兩句話，其組成有四種可能性，三句話便有八種，以此類推。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 基本真值表：否定號(Negation)

P	$\neg P$
T	F
F	T

- 其他記號：「 $\sim$ 」、「 $-$ 」。

強度：由大到小排列(1)  $\neg$ (2)  $\wedge$ 、 $\vee$ (3)  $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 。

強度的意思就是：在讀一個句子時，要依照他們做一強度區別，越強者先做運算。

例一： $\neg P \wedge Q$ 。其主要連接詞是and，若要表示主要連接詞是negation，要寫作 $\neg(P \wedge Q)$ 。

例二： $P \rightarrow Q \wedge R$ 。這句話主要連接詞為 $\rightarrow$ ，若要表示主要連接詞是 $\wedge$ ，要寫作 $(P \rightarrow Q) \wedge R$

例三： $P \rightarrow Q \rightarrow R$ 。兩個 $\rightarrow$ 強度一樣，這是不合語法的句子，如果不加括號，無法計算。要加括號才能運算。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 基本真值表：選言號 (Disjunction)

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- 其他記號：互斥選言號「 $\vee$ 」(exclusive disjunction)

兩個命題，要考慮的便有四種情況。

比如這位同學要娶妻子，有兩個條件：是女的，相處得不錯。假設有天你在網上認識了一個人，相處的不錯。若她跟你說：「我是女的，我們相處的不錯。」這兩個條件若是「或者」夠不夠？若同學說：只要是女的或者相處的不錯？一定不會這樣開條件。

這兩個只要有有一個為真，整句話就為真，只有在兩個都假才是假，其他情況都為真。

選言號與互斥選言號的差別在那？

何謂互斥，若有個歹徒架著我的脖子說：「要錢還是要命？」我會說：「兩個都要。」因為這兩個不互斥，對吧。

當我說兩個都要，就是允許兩個同時真，可是歹徒的意思是只能選一個。

可是若我說：「我不曉得要跟A結婚好，還是跟B結婚好？」這會不互斥嗎？不能兩位都娶嘛？顯然這是互斥，絕不是能相容的。

在目前這個系統目前只用 $\vee$ 。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 基本真值表：連言號 (Conjunction)

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- 其他記號：「&」、「·」

And表示只有在兩個俱為真時方為真，其他均為假。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 基本真值表：條件號 (Conditional)

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- 其他記號：「 $\supset$ 」、 「 $\Rightarrow$ 」

接下來是違反直覺的符號了。

只有一個情況為假：前真後假。其他均為真。

比如：今天出席者期末成績保證80分以上，結果某位有出席同學期末僅62分，於是來找老師理論，可見對他來說老師說假話。另一位出席的同學期末拿到92分，可見對他來說，老師的話是真。未出席的某位同學拿50分，前面假(因為他沒有出席)，也沒拿到80分以上，他會不會覺得老師說假話？對他來說，老師說真話。另一位未出席的同學拿85分，前面假，後面真(拿到了80分以上)，也不會覺得老師說假話。即使他沒有出席，不管有沒有拿到80分以上，好像對老師說的話都給它真也沒有什麼不對。

反例：若傅老師是位女人，則他必是千嬌百媚的姑娘。 請問同學真還假？在邏輯上是真，但一般人會覺得是假。傅老師是女人這句話是假，前為假， $P \rightarrow Q$ 為真，日常情況，在前提為假，我們不會認為這句子是真的，這樣的區別告訴我們，真假值不太符合日常生活直覺的，因此我們有另一個邏輯系統在處理條件句。在古典邏輯中，就把這樣的蘊含關係稱為Material implication。

各位若拿這個符號與日常生活的想法做連結，是有會差異的，而這個差異在這課程不處理。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 基本真值表：等值號 (Equivalence)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- 其他記號：「 $\equiv$ 」、「 $\Leftrightarrow$ 」

等值是雙向的，從P到Q，從Q到P。等值的意思就是兩個值相等就是真，兩個不等值為假。

以上就是基本真值表。



## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 恆真句(tautology)：考慮語句的所有可能情況，如果該語句在所有可能情況中均為真，若且唯若，該語句為恆真句。
- 實例：
  - (a)  $P \rightarrow P$
  - (b)  $P \vee \neg P$
  - (c)  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

語句包括：恆真句、矛盾句、偶真句。

恆真句通常稱之為tautology，翻譯上有點困難，為了不陷入恆真的問題，而不用「恆真」字眼，採用音譯「套套邏輯」。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (a)  $P \rightarrow P$

P	P	$\rightarrow$	P
T	T	T	T
F	F	T	F

P是一個命題，有兩種情況：真、假，  
在所有P的地方都先填上真假，用剛剛提到的真值表來做運算，  
演算結果發現在所有可能情況皆為真，就稱為恆真句。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (b)  $P \vee \neg P$

P	P	$\vee$	$\neg$	P
T	T	T	F	T
F	F	T	T	F

P同樣有兩種情況：真、假。根據連接強度，要先從negation開始，接下來做 $\vee$ 。  
 $P \vee \neg P$  是恆真句。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

(c)  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

P	Q	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$				
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F

這有兩個命題，因此要考慮四個情況。  
第一步：由第二個箭號開始運算起  
第二步：再由P與箭號運算  
所有情況均為真，此亦是恆真句。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 矛盾句(contradiction)：考慮語句的所有可能情況，如果該語句在所有可能情況中均為假，若且唯若，該語句為矛盾句。
- 實例：
  - (d)  $P \wedge \neg P$
  - (e)  $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$
  - (f)  $P \leftrightarrow \neg P$

矛盾句指任何情況均為假。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (d)  $P \wedge \neg P$

P	P	$\wedge$	$\neg$	P
T	T	F	F	T
F	F	F	T	F

第一步：填P

第二步：填negation

第三步：填 $\wedge$ ，and要兩個俱真方為真

這是一個矛盾句

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

(e)  $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$

P	Q	$\neg$	$(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$				
T	T	<b>F</b>	T	T	T	T	T
T	F	<b>F</b>	T	T	F	T	T
F	T	<b>F</b>	F	T	T	F	F
F	F	<b>F</b>	F	T	F	T	F

把 $\neg$ 遮掉，會發現剛剛已經做過了，也就是把恆真句括號起來加個 $\neg$ ，就會變成矛盾句。

比如 $1=1$ 恆真，那 $1 \neq 1$ ，是矛盾句。

第一步：先填P、Q真假。

第二步：填 $\neg$ 。

是一矛盾句。



## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (f)  $P \leftrightarrow \neg P$

P	P	$\leftrightarrow$	$\neg$	P
T	T	F	F	T
F	F	F	T	F

第一步：填 $\neg P$

第二步：填 $\leftrightarrow$ ，兩邊不等值，為假。  
為矛盾句。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 偶真句(contingent, indeterminated sentences)：  
考慮語句的所有可能情況，如果該語句在某些可能情況中為真，其他可能情況中為假，若且唯若，該語句為偶真句。
- 實例：
  - (g)  $P$
  - (h)  $P \vee \neg Q$
  - (i)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$



剛剛說若所有情況為真，叫恆真句，所有情況為假，為矛盾句。  
若有的真，有的假，就稱之為偶真句。比如： $2+2=4$ 是恆真句， $2+2=3$ 、 $1\neq 1$ 是矛盾句。

什麼樣的句子我們會當成偶真句，比如：傅老師是好人。這句話是真是假，很難說。有時說不定他是好人，有時說不定是壞人。假設傅老師一輩子都沒做過壞事，那他是好人是恆真句嗎？不是，因為「傅老師是好人」充其量指在現實世界中，他沒做過壞事，但可能想像一個情況，老師是壞人。因此老師是好人是偶然的，非必然。邏輯考慮的不是只有現實世界，考慮的邏輯世界與現實世界是不一樣的。

比如：當你說：「不可能」時，有幾種情況？好比，我說：「我明天要去冥王星出差一禮拜。」同學說：「不可能。」這指的「不可能」是指現實上不可能，但請問物理上可不可能？當然可能。若人類將來做出一太空船，讓我一天來回冥王星，物理上是可能的，因為傳不用超過光速。物理上不可能的是超過光速，人類尚做不出超過光速的東西，超光速是要質量為零，至少物理學家是這樣說的。同學說的不可能指現實上不可能，並非物理上不可能，只是現實上尚做不到。

假設未來，我們來做一超光速的飛機，請問這件事的不可能是何？是物理的不可能，因為光速是要質量為零，邏輯上可能，因邏輯是沒有矛盾。

請問何為邏輯上不可能？矛盾句，比如  $P \wedge \neg P$ ，傅老師不可能是男人又不是男人。如果是人妖呢？如果是人妖，就不是男人，只能歸類成男人或不是男人，這是互斥的。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (g) P

P	P
T	T
F	F

P為偶真句。P也是formula，可運算。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (h)  $P \vee \neg Q$

P	Q	P	$\vee$	$\neg$	Q
T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F

根據強度，要從negation開始，再算 $\vee$ 。  
有些情況為真，有些為假，為偶真句。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

(i)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$

P	Q	$(P \rightarrow Q) \rightarrow P$			
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	F	F

括號內先運算。

括號刮前面還是後面，會造成不同結果，是不同的兩個句子。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 命題之間的關係
- (1) 蘊涵關係(implication)
- (2) 等值關係(equivalence)
- (3) 不一致(inconsistency)
- (4) 一致性 (consistency)

接下來要介紹命題間的關係，

(1)蘊含關係，我個人傾向用**entailment**這個字，因為**implication**多在講語句的關係，**entailment**在講論證的關係，是有差異的。

(2)等值關係，兩個語句等值就是表達相同內容的意思。

(3)不一致和一致性則是談論某個語句集合中的所有語句是否可能同時為真，如果不可能出現同時為真的情況，則該語句集合是不一致的；反之，如果可能同時為真，那麼該語句集合是一致的。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (1) 蘊涵關係(implication)
- 設想某個句式集合 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ，以及句式 $\psi$ ，如果沒有任何情況使得 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 皆真而 $\psi$ 為假，則稱「 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 語意上蘊涵 $\psi$ 」。
- 記法： $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$



本章開頭便說明現在講的是語意學，語意學就是運用語句的真假值演算。特別強調語意蘊涵，

此為語意蘊涵，之後會教到語法蘊涵，兩者不一樣。

$\models$ ：Double turnstile

語法蘊涵是單個槓槓，叫turnstile。

表示前面 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 語意上蘊涵後面的 $\psi$ 。



## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 蘊涵關係實例說明：證明方式為當  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$  為恆真句時，若且唯若，上述的蘊涵關係成立。
- (j)  $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \models \neg P$
- (k)  $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- (l)  $P, \neg P \models$

證明方法如下：

若要證明前面  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$  蘊涵  $\psi$ ，就把前面(前提)做一個conjunction，與後面(結論)做conditional，若是  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi)$  為恆真句的話，蘊涵關係就成立。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 想要證明  $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \models \neg P$  的蘊涵關係成立，就是設法證明  $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow \neg P$  是恆真句。

P	Q	$((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow \neg P$										
T	T	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	T	F	T	T	F	T	T	F

### 運算順序

第一步：第一個 $\rightarrow$ (括號內先做)。

第二步： $\neg$ 。(括號內先做，且強度較強，故順序先於第二個 $\rightarrow$ )

第三步：第二個 $\rightarrow$ 。

第四步： $\wedge$ 。

第五步： $\neg$ 。

第六步： $\rightarrow$ 。

結果是恆真句。

這句話證明  $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q$  蘊含著 $\neg P$ 的意思是什麼？就是同樣一個承諾，如果做出矛盾的行為，那承諾就是假的，比如有個男生跟你做出承諾：「如果我愛你，我就會一輩子疼你。」但有天吵架，他說：「如果我愛你，也不一定要一輩子疼你。」當他這樣講的時候，其實這蘊涵著什麼？其實他已經不愛妳了。這是很簡單的邏輯推論，如果他給你一個承諾，卻做出矛盾的行為，就可以推出其實他已經不愛妳了。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 想要證明  $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  的蘊涵關係成立，就是設法證明  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  為恆真句。

P	Q	P	$\rightarrow$	(Q	$\rightarrow$	P)
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F

- 上述的蘊涵關係表示任意命題都蘊涵恆真句。



$\models$ 前面沒有東西，意思是它沒有前提，也就是說我們要證明這蘊涵關係成立的話，若語意蘊涵關係成立，它不可能前提皆真，結論為假。因為沒有前提，那我只要證明結論皆真，這樣的蘊涵關係就一定成立。證明結果，這個蘊涵關係成立，其意思是只要結果為真，前面加什麼或不加，這蘊涵關係都成立。比如： $2+2=4$ 為恆真句。傅老師長得很帥蘊涵 $2+2=4$ ，也就是傅老師長得很帥可以推出 $2+2=4$ ，請問這成立嗎？成立，因為 $2+2=4$ 就成立。若說傅老師長得跟芭樂一樣，也可以推出 $2+2=4$ 。

很多人把這邏輯搞錯了，他先假設結論是對的，再去找理由，比如說：有個同學今天決定要翹課，好巧不巧被老師遇到，因為她現在準備要翹課了，只是在找理由，他可以任意找，他對老師說：「因為老師長得跟芭樂一樣，所以我要翹課。」其實他只是隨便找個理由。

上述例子跟投影片所說的不一樣，投影片上說的，結論必須是恆真句，但同學的結論並非恆真句，他也這樣做，事不對的，但很多人思考上會先假設結論是對的，再去找理由。任意命題都會蘊涵恆真句，也就是沒有前提也成立。

古典邏輯中的一個問題是前提與結論並沒有關係，怎麼可以說推論關係成立，這的確是這個系統的基本問題，我們只在乎前提與結論的真假值演算，

比如： $P \wedge \neg P \models Q$ ，我們要證明 $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$ ，是成立的，運算結果是恆真句。

可是請問P跟Q是一樣的東西嗎？不是，可是為什麼可以推出，就是因為我們只關心真假值。若邏輯是為了捕捉我們的推論直覺，這樣的蘊涵關係違反直覺，另有哲學家提出另個邏輯系統：relative logic，也就是前提與結論內容上要相關。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 想要證明  $P, \neg P \models$  的蘊涵關係成立，就是證明  $(P \wedge \neg P) \rightarrow \phi$  為恆真句。

P	(P	$\wedge$	$\neg$	P)	$\rightarrow$	$\phi$
T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

- 上述的蘊涵關係表是矛盾句蘊涵任意命題。



各位發現此論證沒有結論，沒有結論意思是我任意用 $\phi$ 代表， $\phi$ 指的是任意語句。這會是一個恆真句。表示若前提為矛盾句，後面不管加什麼都成立。

比如：林同學與陳同學為男女朋友，老師晚上在公館夜市遇到林同學與另一位非陳同學的同學牽手逛夜市，老師去跟陳同學說了，陳同學質問林同學，林同學說他在昨晚總圖念書，陳同學相信了。

老師問陳同學，她說：「老師跟林同學說的話都相信。」也就是陳同學相信昨晚林同學在公館夜市，又不在公館夜市；在總圖，又不在總圖。如果是這樣，我們就會說：陳同學是沒有什麼不能相信的。

連這樣的矛盾 $(P, \neg P)$ 都相信，那就沒有什麼不可相信的，就是什麼都相信。

推論上思考方式是這樣，如果可以相信矛盾，那就沒什麼不能相信，可以推出任何結論。只要前面是矛盾句，後面不管寫什麼都對。我們是否容許前提是矛盾的？若容許，便可推出任何結論。好比說：若從樓上丟東西，越重的東西是否掉得越快，直覺上是覺得對。但各位可以體會出這句話是不一致的、矛盾的？伽利略說：若把一公斤跟兩公斤的鐵塊一起丟下樓，兩公斤應該比較快，但若把一公斤放在兩公斤下面，不要綁起來，一起丟，請問兩公斤是變快或變慢？可以有兩個思考方向，一是變快，因為變成三公斤。但另一思考方向來看，兩公斤應該變慢，因為一公斤的鐵塊擋住它。若看成一個系統，應該變快，若看成兩個系統，應該變慢。所以這句話本身就是矛盾。所以這句話本身就是矛盾。矛盾句在科學中很多。比如我只幫這個教室裡不幫自己打成績的人打成績，那請問我要不要幫自己打成績？如果我不幫自己打成績，會導出一個結論：我要幫自己打成績。一旦我幫自己打成績，我又不能幫自己打成績。那我到底要不要幫自己打成績？

聽起來沒問題，其實蘊涵了這樣的矛盾。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (2) 等值關係(equivalence)
- 對任意兩個句式  $\phi$  與  $\psi$  而言， $\phi$  與  $\psi$  等值，若且唯若  $\phi$  語意上蘊涵  $\psi$  而且  $\psi$  語意上蘊涵  $\phi$ 。
- 記法： $\models \phi \leftrightarrow \psi$

等值意思是相互蘊涵。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 等值關係實例說明：證明方式為當  $\phi \leftrightarrow \psi$  為恆真句時，若且唯若， $\phi$  與  $\psi$  的等值關係成立。
- (m)  $\models (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
- (n)  $\models (P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$



## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 想要證明  $P \rightarrow Q$  與  $\neg P \vee Q$  是等值的，就是設法證明  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$  為恆真句。

P	Q	(P	$\rightarrow$	Q)	$\leftrightarrow$	( $\neg$	P	$\vee$	Q)
T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T	F	T	F

為什麼要學等值？

「如果你愛我，就要買鑽戒給我」，這句話跟「買鑽戒給我，或者說你不愛我。」是一樣的，更接近日常生活的用法：除非你不愛我，否則買鑽戒給我。除非也是OR的意思。

我們日常生活常用等值在思考。



## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 想要證明  $P \vee Q$  與  $\neg(\neg P \vee \neg Q)$  是等值的，就是設法證明  $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$  為恆真句。

P	Q	(P	$\vee$	Q)	$\leftrightarrow$	$\neg$	( $\neg$	P	$\wedge$	$\neg$	Q)
T	T	T	T	T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	T	F	T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	T	F	T	F

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 關於等值關係的重要觀察：
- (1) 所有的恆真句都是等值的。
- (2) 所有的矛盾句都是等值的。
- 你能夠試著說明這兩個說法成立的理由嗎？

為何所有的恆真句均等值，所有矛盾句均等值的？若為恆真句指所有可能情況皆真，若兩個語句皆真，那便為等值的，矛盾句情況也一樣，兩句均假，那也是等值的。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (3) 不一致(inconsistency)
- 對任意句式集合  $\Gamma$  而言， $\Gamma$  是不一致的，若且唯若沒有任何情況能夠使集合  $\Gamma$  中的所有語句為真。
- 記法： $\Gamma \models$
- 不一致是使得我們覺得無法信賴說謊的人的重要依據。

假如你告訴我：「老師，如果你是好人，我的期末成績應該超過90分。老師我相信你是好人，你一定是好人，可是我期末沒有90分。」

這個人在告訴我什麼，「老師要一致」，他的意思：老師你是好人，那期末成績就會給我90分，老師你是好人喔，那若我期末沒有給我90分，就表示不一致。他的意思就是表示期末要給我90分以上。

不一致意思就是後面可以接任何東西，什麼叫不一致可以推出任何東西？假設李同學被他女友撞見昨晚在公館夜市牽著另一個女生的手逛街，他女友問李同學：「你昨晚去哪裡？」李同學說：「我為了今天的邏輯課，昨晚跟傅老師討論邏輯討論一個晚上，都在圖書館。」他的女友作何感想？傷心欲絕啊，後面不管接什麼，不一致講什麼都沒有意義。

說話的一致性是很重要的。如果遇到一個人曾經跟你說謊，你就會覺得他一直在跟你說謊，因為只要有不一致出現，後面講什麼都沒有信賴感，因為推什麼都對，各位一定要記得建立信賴很困難，破壞很容易。

各位有這基本的思考想法，就是根源於這不一致的概念。

所以各位會覺得說過謊的人會再說謊。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 不一致的實例說明：證明方式為當  $\Gamma$  中的所有句式的連言是矛盾句時，若且唯若， $\Gamma$  是不一致的。
- (o)  $\Gamma : \{ P \vee Q, \neg(\neg P \rightarrow Q) \}$

有沒有人一眼看出他是不一致的？其實很多人在說話不太能聽得出來他不一致，但仔細想會知道是不一致的，這種情況尤其在比如說律師在看檢察官起訴理由或判決書，要上訴，通常找理由不一致，我們剛剛說，若理由是不一致的，可以推出任何結論，用同樣的理由，假設它是不一致的，可以推出他有罪或無罪，法官可用此理由判他有罪，律師也可據此主張無罪。

寫論文也是一樣，若整篇論文是不一致，本來論文要證明你的主張，若是不一致的，那就會讓你的主張是成立的，同時也是不成立的。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 想要證明  $P \vee Q$  與  $\neg(\neg P \rightarrow Q)$  是不一致的，就是設法證明  $(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \rightarrow Q)$  為矛盾句。

P	Q	(P	$\vee$	Q)	$\wedge$	$\neg$	( $\neg$	P	$\rightarrow$	Q)
T	T	T	T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F

這兩句話是不一致的。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- (4) 一致性(inconsistency)
- 對任意句式集合  $\Gamma$  而言， $\Gamma$  是一致的，若且唯若至少有一個情況能夠使集合  $\Gamma$  中的所有語句為真。
- 記法： $\Gamma \neq$
- 一致性是寫作或小說創作的重要思考方向



如把所有語句連接起來，至少有一情況使它為真即可，就是不要是矛盾句，就表示它是一致的。

$\Gamma \neq$  表是不能推出任何東西，多加了一橫表示語句集合 $\Gamma$ 是一致的

各位想想看那個李同學的女友心裡想什麼？你再講啊，再掰啊。

如果女生沒有看到李同學跟女生逛街，問李同學昨天晚上去那，李同學同樣說詞，他女友很懷疑，懷疑表示後面不能隨意加東西的，表示他的女友並不是相信任何語句，也就是該蘊涵關係是不成立的。

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 一致性的實例說明：證明方式為當  $\Gamma$  中的所有句式的連言不是矛盾句時，若且唯若， $\Gamma$  是一致的。
- (p)  $\Gamma : \{ P \vee Q, \neg(P \rightarrow Q) \}$

## Unit 4 語意學基本預設及語句連接詞

- 想要證明  $P \vee Q$  與  $\neg(\neg P \rightarrow Q)$  是一致的，就是設法證明  $(P \vee Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$  不是矛盾句。

P	Q	(P	$\vee$	Q)	$\wedge$	$\neg$	(P	$\rightarrow$	Q)
T	T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T	F

有一情況為真，就表示是一致的。

每一學科都會有很多理論，何謂理論？理論是一群句子，種種定律，最重要的測試就是，彼此間不能有矛盾情況，因那叫不一致，科學理論的基本要求就是理論本身必須是一致的。