

## Unit 3 命題邏輯語言

授課教師：傅皓政 老師



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示  
—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

## Unit 3 命題邏輯語言

- 日常語言構成的論證的問題：
- (1) 歧義(ambiguity)
- (2) 含混(vagueness)
- (3) 開放(open)



1003-1(00011) 00:05:35

我們來看看，日常語言當中會造成的問題大概是這樣，第一個，我們會遇到歧義的問題，這個問題會發生在哪裡？

各位仔細想想看，在日常生活中你會不會問別人說，你講這個是什麼意思？

你會不會發出這種疑問？他講的每一個字你都懂吧？你有聽出他講的每個字吧？可是你為什麼需要他進一步解釋呢？為什麼？因為你會懷疑他講話的真正意義是甚麼。

比如說，有一個人在椰林大道上碰到傅老師，他一見面就跟我說「老師你好帥喔」。我就說「你那個帥是什麼意思你要講清楚」。搞不好他的意思是，你是一個沒有頭的老師，老師上面不是一個頭嗎？如果把頭拿掉就是帥嘛。所以老師如何可以變成帥的老師？就把頭拿掉好嘛。說不定他是這個意思嘛，所以我需要他再解釋。我們平常在對話的時候，我們總會覺得對於對方所講的意思，好像不見得是我們所想的那個樣子，所以會有歧義的問題。所以待會我們來看一個比較基本的歧義。

接下來，我們日常生活語言還會碰到含混的問題，什麼是含混？很簡單，我們來投票。在座覺得傅老師已經老了的舉手，好，有，同學很好。那覺得傅老師還不老的請舉手，好，也有，很好。那搞不清楚傅老師他是老還是不老的請舉手，也有對不對，這就是很含混的意義。所以基本上我們很難說我什麼時候叫做老，我們每個人都會老，對吧？可是你一定沒有辦法找到一個點說，我上一秒還沒老，下一秒我老了，應該找不到這樣一個狀況，對吧？所以這是一個很含混的概念，就是說對我們來講，不管是兒童、成人、老人這些都是很含混的。我們平常都會用，可是他很含混，我們其實沒有一個精確的使用方法，對吧？這個我們稱之為含混的問題。

接下來第三個，我們會有開放性問題，開放性問題就是說，我們的日常語言太允許這樣的東西，太允許他可以有新的符號進來，可以有新的解釋，每一個符號都可以給它一個新的解釋，所以在座的各位有沒有人有這樣的把握說，我已經把中文完全學會了？所有的字、所有的意思我通通都學會了，各位用想像的就知道是不可能的，對吧？其實我們有很多字不認識。

撇開我們不認識的字，我們還遭遇到一個基本困難是什麼？我們會有很多新的解釋進來，這個新的解釋是被允許的，對吧？比如說前面這群男生他們講好了，從今天開始，女朋友的單位全部用公升計算，然後A同學就問B同學說：「你現在有幾公升？」B同學說：「我現在有5公升。」大家都聽不懂只有他們懂。然後再問C同學說「你昨天喝了幾公升？」C同學說：「我昨天喝了一公升。」我們都聽不懂他們在講什麼，可是他們之間談的很愉快。有一天C同學神情落寞地出現，A同學就問：「你怎麼了？」

C同學說：「我現在0公升。」他們在講話的過程當中，我們其實不曉得他們在講什麼，這個一般在語言裡面我們會把它叫做黑話，就是只有他們這個團體裡的人懂，其他人不懂。

然後有一些稱為術語，比如說，以前有人被黑道威脅，黑道就寄一封信來，

「你要是不聽我的話，我就給你一顆芭樂、兩顆土豆。」那個人收到信函就說：「這個黑道怎麼這麼遜阿，我不聽他的話，他還要送我芭樂土豆，我送他兩斤好了。」他不懂黑道的術語，所以就把它當作一般的解釋，對吧？那像這一種新的解釋進來，我們的語言是允許的，這種我們稱作開放性。

那這樣各位就可以想像，我們的語言是一直擴張的，所以我們很難說我們真的很了解我的語言，或者完全理解這個語言，對吧？我們很難做到這點，所以我們必須克服這樣的困難。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 實例：

Nobody is perfect.

I am a nobody.

---

Therefore, I am perfect.

1003-1(00011) 00:12:02

首先我們先從歧義開始，這是我個人的寫照，Nobody is perfect。

這個前提大家都接受嘛。In fact, I am a nobody, right?各位也都同意嘛。So, I am perfect.

這個論證一定哪裡出問題了，對吧？你們不會同意老師很完美對吧？所以他的問題出在哪裡？到時候我們會再談，論證中的nobody這個語詞會有歧義的問題。因為我們可以理解說，前面那個nobody跟後面那個nobody根本就不是同一件事嘛，所以是大有問題的。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 歧義(ambiguity) :
- (a) 語法歧義(syntactic or structural ambiguity)
- (b) 語意歧義(semantic or lexical ambiguity)

1003-1(00011) 00:13:07

首先來看看我們會遇到的歧義問題。

第一類我們稱之為結構上的歧義，或是語法上歧義。

第二類歧義則稱為語意上的歧義，或者是字詞上的歧義。

第三類我們先不在這裡談，通常稱為語用上的，語用的歧義就是跟使用者有關係，或者跟語氣有關係。

比如說，有一個人椰林大道上遇到傅老師，他就說：「老師你好“帥”喔。」

請問他那個酸溜溜的講話是什麼意思？是真的在稱讚老師嗎？

所以說那是使用者的一個表現、語氣，比如說，你跟對方吵架，對方說「好啦你都對拉你都對啦....」他真的很在講你對嗎？他的意思其實是你都錯嘛，他只是不想跟你爭吵而已。所以那是跟使用者還有語氣是相關的。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 語法歧義：
- 根據不同的語句結構解讀方式，同一語句會有不同的意義。
- 例如：下雨天留客天留我不留

1003-1(00011) 00:15:10

語法歧義就是，根據不同結構來解讀，即有不同意義。各位看到這句，第一個，直接的讀法是什麼？主人的意思是：下雨，天留客，天留，我不留。

所以，請你回家，對吧？那客人一看到，心裡面真是太感動，客人讀成什麼？下雨天，留客天，留我不？留！

所以同樣的一句話，不同的斷句方式，結構不同展現的意思不同，這個我們稱為語法上或結構上的歧義。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 語法歧義的實例：
- 臺大校園內有許多聰明的學生和教授。
- 1. 臺大校園內有許多聰明的（學生和教授）。
- 2. 臺大校園內有許多（聰明的學生）和教授。

1003-1(00011) 00:16:42

那我們來做一些小練習，第一個，台大校園內有許多聰明的學生和教授。它的問題在哪？

第一個解讀是，臺大校園內學生和教授都很聰明。但學生也許是這個意思：臺大校園內有許多聰明的學生，和教授。教授算不算聰明那群？如果從這句話來看，大有爭議。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 語法歧義的實例：
- 我們公司有一群勤奮的員工和老闆。
- 1. 我們公司有一群勤奮的 ( 員工和老闆 ) 。
- 2. 我們公司有一群 ( 勤奮的員工 ) 和老闆。

1003-1(00011) 00:17:43

同樣，來看其他例子。

你和老闆說，我們公司有一群勤奮的員工和老闆。其實你的意思是：我們公司有一群勤奮的員工，和老闆。這就是我們日常生活中常見的語法的問題。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 語法歧義的實例：
- 本系有三位教授出版了五本書。
- 1. 三位教授總出版量是五本書。
- 2. 三位教授合著五本書。
- 3. 三位教授每人出版五本書。

1003-1(00011) 00:18:17

接下來看這個，

本系有三位教授出版了五本書，請問總共有幾本？五本？十五本？這個句子其實有很多解釋，

第一個，我們有三個教授，他的總出版量就是五本書。

第二個，有三位教授合著五本書。

第三個我們也能說成，三個教授總共出了十五本書。

對吧？

有三種不同解釋方法，這個是語法歧義的問題。



## Unit 3 命題邏輯語言

- 語意歧義：
- 如果出現在語句中的語詞，會有不同的解釋，則同一語句會有不同的意義。
- 例如：「日落香殘，掃去凡心一點；  
爐邊火盡，須把意馬牢拴。」

1003-1(00011) 00:19:29

再來，語義歧義，通稱為semantic 或 lexical，lexical是字詞上的，對字詞有不同解釋，這句的意思就不同，在這裡指一般解釋。

譬如說，我們看到，這是紀曉嵐的對聯，他投宿廟裡，和尚要求墨寶，他就寫了這副對聯。和尚一看，寫得太好了，完全符合出家人心境。但紀曉嵐真正意思是，他只是在做一個字謎。第一句：日落香殘，日不見了(禾)；掃去凡心一點，一點不見了(几)。爐邊火盡，火不見了(盧)，把它兜起來，這副對聯的意思就是這樣(禿驢)。

所以各位可以了解，同樣一個對聯，和尚和紀曉嵐看起來不一樣，紀曉嵐只在字面上在一個字謎，所以是不一樣的。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 語意歧義實例：
- 那個女孩臉好「正」。
- 1. 那個女孩的臉蛋很漂亮。
- 2. 那個女孩的臉形是正方形。

1003-1(00011) 00:21:32

那接下來我們來練習，

如果我告訴你，你看那女孩臉好「正」，什麼意思？

(同學：方的)

真的嗎？比較多人覺得它是正方形的還是比較漂亮？乍聽之下至少有這兩個意思，對吧？你說那女孩臉好「正」，其實要問一問是第一個意思還是第二個意思。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 語意歧義實例：
- 你出門在外，小心那些「花花草草」。
- 1. 你要注意是否有值得記錄的奇花異草。
- 2. 你要注意不要勾搭別的女生。

1003-1(00011) 00:22:27

接下來，你出門在外，小心那些「花花草草」。  
請問各位聽到直覺是什麼意思？

(同學：咬人貓)

(同學：鬼針草)

還有沒有？

(同學：不要拈花惹草)

1003-2(00012) 00:00:01

這位同學說不要拈花惹草，拈花惹草也是歧義對吧？

如果這對夫妻是植物學教授，妻子說你出門在外，小心花花草草，搞不好她指的是，要採集標本、找新的植物之類的。

可是我們也能解釋成，你出去不要隨邊勾搭。

是吧？很好

## Unit 3 命題邏輯語言

- 含混性：
- 某個語詞是含混的，若且唯若，存在某些包含該述詞的語句，既無法決定該語句為真，亦無法決定該語句為假。

1003-2(00012) 00:00:49

接下來要來看，什麼叫含混性(vagueness)。大概是這樣...各位以後只要看到「若且唯若」這四個字，粗略地想，相當於“定義”的意思。

大概是這樣的意思：存在某些包含該述詞的語句，既無法決定該語句為真，亦無法決定該語句為假。

我們把它定義成這樣。如：我剛剛說老師老了，有些人可能覺得是真，有些人可能覺得不正確，也有些人不知道。所以無法找到一個正確、確定的答案。並非絕對正確。只要這樣的語詞我們就把它稱為含混性。

譬如說：長大，各位都長大了，可是你是在哪一刻、哪一天長大的呢？

可是你就知道你長大了嘛，以前是兒童，對吧？

## Unit 3 命題邏輯語言

- 含混性：
- 以禿頭為例，滿頭秀髮的人顯然不是禿頭，但是，如果一根一根頭髮拔掉的話，遲早會變成禿頭。但是，我們能夠找到用來區分是否禿頭的那根頭髮嗎？

1003-2(00012) 00:02:41

這樣的語詞基本上稱之為含混。

我們來看第一個例子。各位看一下，我是不是禿頭？各位讀書時緊張會不會習慣拔頭髮？假設傅老師是個讀書緊張就會拔頭髮的人，我們能不能找到一個頭髮，一拔就知道拔的時候禿了或沒禿？這根頭髮存在嗎？似乎不存在。但各位可以理解，如果一直拔，我就會變禿，對吧。它的問題在於，我們找不到一個清楚的界限，可是我們能不能理解禿頭的意思，可以吧。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 含混性：
- 再以漸層色塊為例，任意挑選兩個鄰近區塊，我們都會同意這兩個色塊顏色相同，但是，這卻違反了我們可以區分紅色與黃色的直覺。

1003-2(00012) 00:04:55

接下來我們來看漸層色塊，為什麼可以說它是含混的呢？各位可以清楚的看到紅色和黃色嗎？接下來各位告訴我，這兩塊顏色一樣嗎？有沒有看出不一樣？看不出來嗎？那我移過來一點，這兩塊各位覺得一樣嗎？還是看不出來對不對？再移過來一點，各位覺得一樣嗎？各位會發現如果我任意找兩個鄰近的色塊，你們會無法區分它哪裡不同，可是如果我把整個漸層叫回來，你就會發現當然不相同，這大概是含混性的大問題，我們會覺得一塊地區是很模糊、含混的。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 語言開放性：
- 某個語言  $L$  是開放的，若且唯若， $L$  允許新的符號或新的解釋。
- 例如：Orz；冏；醬；XD；886.....

1003-2(00012) 00:06:33

接下來要說開放性的問題，根據它的openness的意思就是說，我們允許新的符號，或是新的解釋進來，我們就會遭遇到這樣的問題。

以下都是同學給我很多的指教，就是我會學到新的語詞、新的解釋，都是同學寫E-mail給我的時候奉獻的。你們會給我很多符號，我就會開始研究它們是什麼意思。

如：原來XD是要把頭歪著來看。這是研究第一久的。

第二久的是“醬”，原來是“就這樣”三個字合成變一個字。

其他的就還好，因為有information我就比較容易懂。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 為了避免推論過程無法避免日常語言帶來的困擾，因此，我們需要一個新的形式語言(formal language)。
- 建構此形式語言的目的，至少要避免歧義、含混以及開放性的問題。

1003-2(00012) 00:07:55

所以各位想看看，我們至少要避免歧義、含混和開放的問題？

我們至少要在推論上避免被干擾。我們在思考上需要一個方法，不要被干擾。我們可以把日常語拿來研究，也不用學形式邏輯、符號邏輯，我們只要把日常用語的對話拿出來研究就好。

但是很難系統化，所以我們需要新的形式語言，稱之為formal language。至少能把剛剛這些問題排除掉。



## Unit 3 命題邏輯語言

- 適合用來處理命題邏輯的形式語言( $L_k$ ) 包含兩個部份：
- (1) 由原初符號(primitive symbols, or alphabet)形成的集合。
- (2) 有限的形構規則(formation rules)。(目的在於建構合宜的句式(well-formed formula, *wff*)。)

1003-2(00012) 00:09:08

接下來我們來看，要談論形式語言，至少需要兩部分。

以後我們凡是提到一個語言，一定包含這兩部分。

第一個部分，我們稱之為符號，原初符號primitive symbols，或alphabet，最原來的符號。

它比較類似我們英文的字母，中文就有點複雜，中文的原初符號是什麼？它不像英文字母有基本的letter。

第二個我們需要formation rules，為什麼需要formation rules，我們要知道哪些是合法的，那些是不合法的。

像上次我們知道 $2+3=5$ ，可是你把它調個位置，我們就不知道怎麼答了吧，不知道意思是什麼，表示他不是個合法的四則運算語句。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 命題邏輯的字彙集包含下列幾個部份：
- (1) 語句 ( 或命題 ) 符號 : P, Q, R, ... ..
- (2) 真值函映 ( 或連接詞 ) :  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  
 $\leftrightarrow$
- (3) 輔助符號 : ( , )

1003-2(00012) 00:11:23

首先我們來看看語句邏輯的符號，一般稱之 $\phi$ 與 $\psi$ ，它包含以下幾個部分，

第一個，我們會有幾個語句符號，也就是命題符號，各位記得在這邊我們有時會用命題，有時會用語句，那都是沒有關係的。他們只是在哲學立場不同，但他們其實完全一樣。原則上會用P、Q、R代表句子，

如：P代表傅老師是男人；Q代表傅老師是女人；R代表傅老師是好人。

接下來，真值函映其實就是函數的概念，意思是我的輸入一定是真假值，輸出也一定是真假值。那是不是所有句子一定有真假值，我們下個單元會告訴各位，為什麼需要有這個東西。

Input有真假值，Output不見得有。再來還有輔助符號，就是括號的意思，括號一定要一對。為什麼需要有括號？請同學跟著我，我現在問的問題請三秒內回答。這位同學， $1+1*2$ 等於多少？  
1、2、3

(同學：3)為什麼是3？因為要先乘除後加減是嗎？可是如果 $1+1$ 用個括號呢？答案是4對嗎？所以括號的意義在告訴我們什麼要先處理，什麼要後處理對吧？有沒有括號會影響正確答案，可幫助避免語法上的歧義。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 命題邏輯語言中的句式都可以經由下列的形構規則建構之。(φ 與 ψ 為句式的變量)
- (1) 每個語句符號都是句式。
- (2) 如果 φ 是一個句式，那麼  $\neg\phi$  也是句式。
- (3) 如果 φ 和 ψ 都是句式，那麼  $\phi\wedge\psi$ ,  $\phi\vee\psi$ ,  $\phi\rightarrow\psi$ ,  $\phi\leftrightarrow\psi$  也都是句式。
- (4) 除了經由規則(1)-(3)所建構的稱為句式外，沒有其他句式。

1003-2(00012) 00:15:29

首先，我們和各位介紹它的形構規則。

第一個，所有語句符號都是 formula，句式。如果 φ 是一個句式，那麼  $\neg\phi$  也是句式。再來，如果 φ 和 ψ 都是句式，那麼我們只要加一個  $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$  和  $\leftrightarrow$ ，也都是句式。最重要來了，第四個是，除了第一個到第三個，沒有其他的是句式。

各位，我們加第四個規則的目的在哪？我們要避免什麼？我們要避免開放的問題。我們要把 openness 去掉。所以這樣的一個 formation rules，告訴我，它是一個什麼語言？記得，它是一個封閉的語言，就是他的治些語句都在這個規則裡，凡遵守這些規則的，就不是這個語言。所以剛剛的括號幫助我們避免歧義的問題，那含混的問題呢？我聽到答案了！P、Q 嘛。就是我們沒有給它實質的解釋，只是用 P、Q 來代表句子，這樣就不會遇到含混的問題。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 根據形構規則(1)，每個語句符號均視為原子句式。
- 實例：
  - (1)  $P$  是一個原子句式。
  - (2)  $Q$  是一個原子句式。
  - (3)  $R$  是一個原子句式。

1003-2(00012) 00:18:04

所以，我們很快來看它的規則，  
根據第一個規則，我們可看出，每個語句符號都是原子句式。  
最簡單的，我們稱之為原子句式，  
所以像 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 這些都是嘛。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 根據形構規則(2)，如果  $\phi$  是一個句式，那麼  $\neg\phi$  也是句式。
- 實例：
  - (1) 如果  $P$  是一個原子句式，那麼  $\neg P$  也是句式。
  - (2) 如果  $\phi$  用來代表  $\neg P$ ，那麼  $\neg\neg P$  也是句式。
  - (3) 所以，像  $\neg\neg\neg P$ 、 $\neg\neg\neg\neg P$  等都是句式。

1003-2(00012) 00:18:37

接下來，根據規則，我們也可以在句式面前加一個 $\neg$ ，它也是一個句式。我們可以看出 $\neg P$ ，也可以做出 $\neg\neg P$ ，甚至可以做出 $\neg\neg\neg P$ ，還有 $\neg\neg\neg\neg P$ 。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 根據形構規則(3)，如果  $\phi$  和  $\psi$  都是句式，那麼  $\phi \wedge \psi$  也是句式。
- 實例：
  - (1) 如果  $\phi$  和  $\psi$  分別代表  $P$  和  $Q$ ，那麼  $P \wedge Q$  是句式。
  - (2) 由於  $P \wedge Q$  和  $Q \wedge R$  都是句式，如果  $\phi$  和  $\psi$  分別代表  $P \wedge Q$  和  $Q \wedge R$ ，那麼  $(P \wedge Q) \wedge (Q \wedge R)$  也是句式。

1003-2(00012) 00:19:05

接下來， $\wedge$ 也是，所以如果我們用 $\phi$ 和 $\psi$ ，我再強調一下，同學也許會覺得怪，為什麼不用 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ，這裡的 $\phi$ 和 $\psi$ 是所謂的語句變量，所謂變量的意思是，它代表一個句子，可大可小，可以是複雜的句子，也可以是很簡單的句子。這個我們稱之為Variable，變量。它並不是用來指特定句子，而是可以用來代替任何句子。所以用 $\phi$ 和 $\psi$ ，不用 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ，我們需要用它代表語句，或者代表formula，所以並不是一個特別的句子或命題。所以你可以看到，如果 $\phi$ 和 $\psi$ 代表很簡單的句子，譬如說 $P$ 跟 $Q$ ，那 $P \wedge Q$ 就是一個句子。但是 $\phi$ 和 $\psi$ 我也可以用來代表很複雜的句子，譬如要把 $\phi$ 和 $\psi$ 分別代表 $(P \wedge Q)$ 和 $(Q \wedge R)$ ，之後在中間加個 $\wedge$ ，這也會是個formula，所以 $\phi$ 和 $\psi$ 並沒有要代表特定的formula、特定的語句或命題，它是一個變量的角色。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 根據形構規則(3)，如果  $\phi$  和  $\psi$  都是句式，那麼  $\phi \vee \psi$  也是句式。
- 實例：
  - (1) 如果  $\phi$  和  $\psi$  分別代表  $\neg P$  和  $\neg Q$ ，那麼  $\neg P \vee \neg Q$  是句式。
  - (2) 由於  $P \wedge Q$  和  $Q \wedge R$  都是句式，如果  $\phi$  和  $\psi$  分別代表  $P \wedge Q$  和  $Q \wedge R$ ，那麼  $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$  也是句式。

1003-2(00012) 00:21:00

再來， $\vee$ 也是一樣。

如果根據形構規則第三條，這些由二元連接詞連接起來的都會是formula。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 根據形構規則(3)，如果  $\phi$  和  $\psi$  都是句式，那麼  $\phi \rightarrow \psi$  也是句式。
- 實例：  
如果  $\phi$  和  $\psi$  分別代表  $\neg P \vee \neg Q$  和  $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$ ，那麼  $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R))$  也是句式。

1003-2(00012) 00:21:21

當然，我們可以越接越長，譬如說我們如果用  $\rightarrow$  來接，可以一直擴張。

這個句子可以用來越長，請問，我可以連到多長？

(同學：要多長有多長)

好答案，還有沒有其他答案？



## Unit 3 命題邏輯語言

- 根據形構規則(3)，如果  $\phi$  和  $\psi$  都是句式，那麼  $\phi \leftrightarrow \psi$  也是句式。
- 實例：  
如果  $\phi$  和  $\psi$  分別代表  $\neg P \vee \neg Q$  和  $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R))$ ，那麼  $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)))$  也是句式。

1003-3(00013)00:00:00-00:00:42

(同學：無限長)

我喜歡你的答案，可以接無限長，是嗎？這位同學說要多長有多長，這位同學說無限長，這兩個一樣嗎？似乎不是這麼一回事。

1003-4(00014)00:00:09

我們繼續剛剛的話題，請說，(同學：要多長有多長，趨近無限但不是無限，所以是一個開放和封閉的概念。)

開放和封閉，我們剛剛的問題是它可以延伸到哪裡？您覺得，這位主張無限長的會是開放？這個要多長有多長可以是封閉的。很好。我們仔細地來探討一下，來舉個各位比較熟悉的例子，請教同學，自然數有幾個？(同學：無限)無限多個，這應該是非常一般的答案，對吧。

再來請教同學，你能不能列出所有的自然數？(同學：沒辦法)

應該是不行，很好。那再請問，你有沒有把握你知道所有的自然數？

(同學：可以)可以對吧，各位把三個答案擺在一起，請問這三位同學的答案如何同時是對的？我們知道它是無限，我們也列不出來，可是我們卻能了解所有自然數。(同學：它有點規律)很好，什麼樣的規律？

是，它有一定的規律！是什麼規律讓你掌握或者理解所有自然數？(同學：都是正整數)都是正整數就能把握你了解所有自然數嗎？很好。我可以了解這個自然數，推到下一個自然數，對嗎？怎麼推？

(同學：加1)再加1，對吧？各位同學已經把暗示講出來，

假設各位同學去看電影，假設這是個賣座的電影，你看電影院出來，人都繞了好幾圈，當你一排的時候，你就告訴旁邊的人說，我跟你說，我確定前面都是人。已經繞好幾圈，你有沒有去看前面都是人？沒有，可是有沒有把握？為什麼有把握？你的把握來自一個推論，你大概會去確定，排在第一個買票的是人，然後只要確定第二件事，排在人後面的一定是人，那整個都會是人，對吧。

那這樣的方式我們稱之為什麼？稱之為recursive function，遞迴函數。

就是你可以不斷去apply這樣的function。

所以基本上，這是人類對無限上的一個突破，就是自然數有好多個，

可是我們不會認為自己無法掌握，我們反而會覺得可以掌握、理解所有自然數，那理解無限多的東西，基本就是靠這樣的函數完成。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 上述建構句式的方式稱為「遞迴定義 (recursive definition)」
- 遞迴定義需要的裝置：
  - (1) 原始步驟
  - (2) 遞迴函數

1003-4(00014) 00:08:09

所以各位可以了解，我們需要這樣的定義，在我們的結構裡，稱之recursive definition。

也就是我可以把剛剛一元的operator不斷重複，就可以建構一個又一個句子。

所以它需要兩個步驟，第一個是我只要確定我們最原始的formula，接下來只要應用function不斷的把它應用，就可以知道它可以建構如此如此的句子，這樣就完成了建構一個語言的方式。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 下列的符號組合並非合宜的句式，請指出其問題。

(1)  $P\neg$

(2)  $\vee(P\neg Q)$

(3)  $((\leftrightarrow P)$

(4)  $\neg\neg\neg P\rightarrow$

(5)  $\neg(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow((P\wedge Q)\vee(Q\wedge R)))$

1003-4(00014) 00:09:03

我們來看一下它的問題

第一個顯然不是對吧？這個問題出在 $\neg$ 擺錯位置， $\neg$ 應該擺在P的前方。

第二個， $\vee$ 是二元的，前面要有一個句子。 $\neg$ 是一元的，後面不能接兩個句子。

第三個， $\leftrightarrow$ 必須是二元的，two places 的operator，所以它不能是這樣的。更何況前面是括號，括號必須是pair的，左括號有右括號就要有。

第四個它當然也是connective的問題。

第五個，它左括號數目必須要和右括號數目一樣。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 直接子句式(immediate subformulae)的定義：
  - (1) 語句符號沒有直接子句式。
  - (2) 句式 $\neg\phi$ 的直接子句式只有 $\phi$ 。
  - (3) 句式 $\phi\wedge\psi$ 、 $\phi\vee\psi$ 、 $\phi\rightarrow\psi$ 以及 $\phi\leftrightarrow\psi$ 的直接子句式為 $\phi$ 和 $\psi$ 。

1003-4(00014) 00:10:43

接下來要介紹一些概念是以後上課常會用到的。

第一個immediate subformulae：在一個formula裡面，你可以找到一個除了它本身以外最長的那個formulae，就是它的immediate subformulae。

這什麼意思呢？就是語句符號它沒有immediate subformulae，因為沒有其他比它更短的。

如果它是一個 $\neg\phi$ ，那它的immediate subformulae就是 $\phi$ 。

那它如果是two place的operator，那 $\phi$ 和 $\psi$ 就是它的immediate subformulae。

各位以前都做過子集合，和你們以前在找最大的子集合是一樣的意思。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 實例：
- (1)  $(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(Q \wedge R)$  的直接子句式：  
 $\neg P \wedge Q$ 、 $\neg(Q \wedge R)$ 。
- (2)  $\neg((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)))$  的  
直接子句式  
 $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R))$ 。

1003-4(00014) 00:12:23

第一個的immediate subformulae就是這兩個，各位注意看它的符號，除了他自己最長的就是 $(\neg P \wedge Q)$ 、 $\neg(Q \wedge R)$ 。

第二個最長的是不是 $\neg$ ？因此去除 $\neg$ ， $((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)))$ 就會是它的immediate subformula。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 練習題：找出下列句式的直接子句式。

(1)  $Q$

(2)  $\neg\neg\neg\neg P$

(3)  $P \wedge Q$

(4)  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$

(5)  $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)))$

1003-4(00014) 00:13:07

我們利用immediate subformulae的概念看以下例子

第一個 $Q$ ，它本身就最長了，所以沒有immediate subformulae。

第二個，把最前面的 $\neg$ 去掉， $\neg\neg\neg P$ 就是它的immediate subformulae。

第三個的immediate subformulae就是 $P$ 和 $Q$ 。

第四個，除了中間 $\vee$ ，兩邊 $\neg(P \wedge Q)$ 和 $(\neg Q \wedge R)$ 就是它的immediate subformulae。

第五個，去除 $\leftrightarrow$ ， $(\neg P \vee \neg Q)$ 和 $((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)))$ 就是它的immediate subformulae。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 子句式(subformulae)的定義：
  - (1) 每一個句式本身都是自己的子句式。
  - (2) 每一個子句式的直接子句式都是原句式的子句式。
  - (3) 每一個子句式的子句式都是原句式的子句式。

1003-4(00014) 00:13:59

我們將immediate subformulae的建構方式一直分解到最小，就是他所有的subformulae。

就跟各位以前用子集合來找出它所有的子集合的方式一樣。

所以每一個formulae都是它本身的subformulae。

每一個subformulae的immediate subformulae都是它的subformulae。

所以所有的句子就會是它原來的子集合，所以把全部的子集合加起來就會是它的subformulae。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 如何完整寫出某個句式的所有子句式？
- 方式：逐步分解並消除語句連接詞。

1003-4(00014) 00:15:13

所以各位可以很快地看出



## Unit 3 命題邏輯語言

- 實例：
- 找出 $(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(Q \wedge R)$ 的所有子句式
- (1) 直接子句式為  $\neg P \wedge Q$  和  $\neg(Q \wedge R)$ ，消除語句連接詞  $\wedge$ 。
- (2)  $\neg P \wedge Q$  的直接子句式是  $\neg P$  和  $Q$ ，消除語句連接詞  $\wedge$ 。
- (3)  $\neg(Q \wedge R)$  的直接子句式是  $Q \wedge R$ ，消除語句連接詞  $\neg$ 。
- (4)  $\neg P$  的直接子句式是  $P$ 。
- (5)  $Q \wedge R$  的直接子句式是  $Q$  和  $R$ 。

1003-4(00014) 00:15:16

這個的子集合，可以一個一個看。

第一個，將 $\wedge$ 去掉可以得到immediate subformulae： $\neg P \wedge Q$  和  $\neg(Q \wedge R)$ 。

第二個可以利用 $\neg P \wedge Q$  去除 $\wedge$ 得到subformulae： $\neg P$ 和 $Q$ 。

第三個將 $\neg(Q \wedge R)$ 去除 $\neg$ 得到subformulae： $Q \wedge R$ 。

第四個將 $\neg P$ 去除 $\neg$ 得到subformulae： $P$ 。

第五個一樣，將 $Q \wedge R$ 去除 $\wedge$ 得到subformulae： $Q$ 和 $R$ 。

所以將全部加起來就是子集合，subformulae。

## Unit 3 命題邏輯語言

- $(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(Q \wedge R)$  的所有子句式所形成的集合如下：

$$\{P ; Q ; R ; \neg P ; Q \wedge R ; \neg(Q \wedge R) ; \neg P \wedge Q ; (\neg P \wedge Q) \wedge \neg(Q \wedge R)\}$$

1003-4(00014) 00:15:45

這些就是它所有的subformulae形成的集合，我們可以一個一個列出來。之後我們在講第六單元時會運用到這些概念。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 主要連接詞(main connective)的定義  
：

在句式  $\phi$  中用來連接直接子句式的語句連接詞稱為  $\phi$  的主要連接詞。

1003-4(00014) 00:16:24

在一個immediate subformulae裡面，被拿掉的那個connective或是operator，那個就是main connective。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 實例：

(1)  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$  的主要連接詞為  $\vee$ 。

(2)  $\neg((P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R))$  的主要連接詞為  $\neg$ 。

1003-4(00014) 00:16:59

語句(1)的main connective是 $\vee$ 。

語句(2)的main connective是 $\neg$ 。

兩句看起很類似，卻是不一樣的句子。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 練習題：

(a)  $\neg\neg\neg\neg P$

(b)  $P \wedge Q$

(c)  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$

(d)  $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (Q \wedge R))$

1003-4(00014) 00:17:17

第一個main connective在最前面的 $\neg$ 。

第二個main connective是 $\wedge$ 。

第三個main connective是 $\vee$ 。

第四個main connective是 $\rightarrow$ 。

## Unit 3 命題邏輯語言

- 連接詞範圍(scope)的定義：

某個語句連接詞的範圍是指在句式  $\varphi$  中可以找到該語句連接詞的最小子句式而言。

1003-4(00014) 00:17:39

接下來我們來看scope。什麼是scope呢？就是某一個連接詞管的範圍到哪裡。這樣的觀念會在第八、九單元時用到。在這裡比較簡單，他只有連接詞，到第八單元後會加入量詞，譬如我宣布各位同學只要有交作業都會有成績，大家都不用擔心了吧，只要有交就好；

但如果我說， $\rightarrow$ 我有有交作業的同學，只有部分的人會有作業成績，大家就開始擔心，要怎麼樣會有作業成績？對吧？

所以我講的範圍在哪，其實是會影響的。那我們來看一下連接詞的範圍在哪？可以連接到的最小的subformulae就是主要連接詞。

## Unit 3 命題邏輯語言

• 實例： $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$

(1)  $\vee$  的範圍是  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$ 。

(2)  $\neg$  的範圍是  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$ 。

(3)  $\neg$  的範圍是  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$ 。

(4)  $\wedge$  的範圍是  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$ 。

(5)  $\wedge$  的範圍是  $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$ 。

1003-4(00014) 00:19:23

我們來看這些scope管的範圍在哪？

就是你可以連接到的最小的subformulae

第一個的scope是  $(\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R))$ 。

第二個的scope是  $\neg(P \wedge Q)$ 。

第三個的scope是  $\neg Q$ 。

第四個的scope是  $(P \wedge Q)$ 。

第五個的scope是  $\neg Q \wedge R$ 。

所以這就是我們邏輯的形式語言。