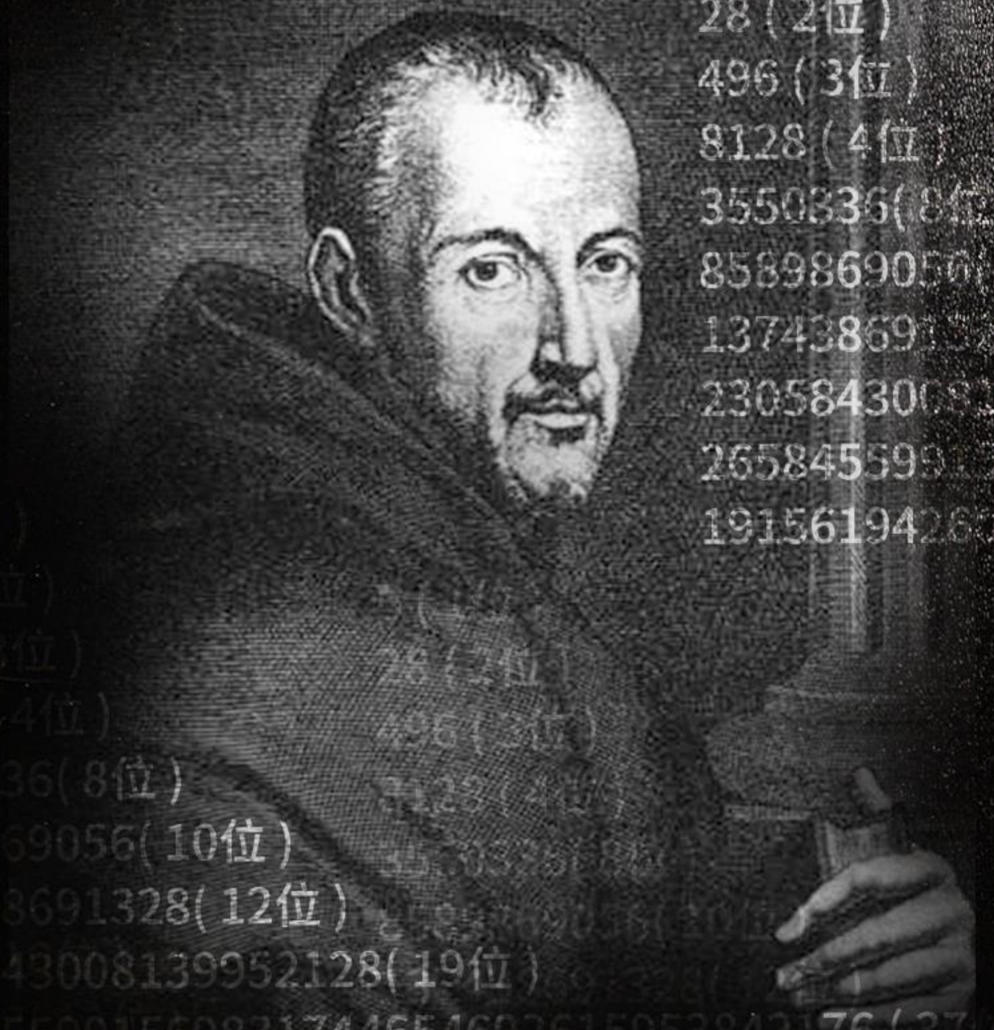
通識博雅課程 -

數學的故事

單元 9

數字的故事(2)—
數字的奇幻世界

中國科技大學　徐惠莉



中國科技大學
CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

臺灣通識網
General Education TW

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，

31，37，41，43，47，53，59，61，67

質數的故事

71，73，79，83，89，97，101，103，107，

109，113，127，131，137，139，149，

151……

在《博士熱愛的算式》書中發現 質數 的故事

- 質數的定義：一個正整數，除了本身和 1 以外沒有任何其他的正整數可以整除它。
  - 在這個世界上，質數是博士的最愛。P.77
  - 「所有質數中，只有 2 是偶數。這位質數號碼的第一位打者，獨自站在無數質數的最前面，帶領著隊伍前進。」P.80
  - 雙胞胎質數→連續兩個奇數的質數：17、19；41、43。P.80
  - 質數判別：窮舉法 341 (11)、2311。 (P.145~147)

註：本單元摘錄《博士熱愛的算式》文字出處的頁碼，以該書第3版為依據。

在《博士熱愛的算式》書中發現 質數 的故事

- 莫仙尼質數→根號的出生體重：$2^{3217}-1$。P.157
- 除了 2 以外，所有質數分成兩大類。
  - 假設 n 是正整數，那麼，質數要麼是 4n+1，要麼是4n-1。
  - 無窮的質數都可以歸類成這兩大類嗎？比方說，13=4x3+1，19=4x5-1
  - 而且 4n+1 的質數可以用2的平方和表示，4n-1的質數卻不能，例如 $13=2^2+3^2$
  - P.233~234

關於質數....

- 最小的質數是 2，也是質數中唯一的偶數；其他質數都是奇數。
- 每個大於 1 的正整數都可以寫成質數的乘積，並且這種乘積的形式是唯一的。
  - 質因數分解，例如 $156 = 2^2 \times 3 \times 13$
- 質數有無限多個，所以不存在最大的質數。
- 莫仙尼質數

證明：質數有無限多個。

- 如果質數的 … 分別為 p_1, p_2, p_3,…,
- 現在我們 …
  $P = p_1 \times$ …
- 顯然，P …
- 所以 P 也 … (質數有 n 個) 矛盾 …
- 所以質數有無限多個

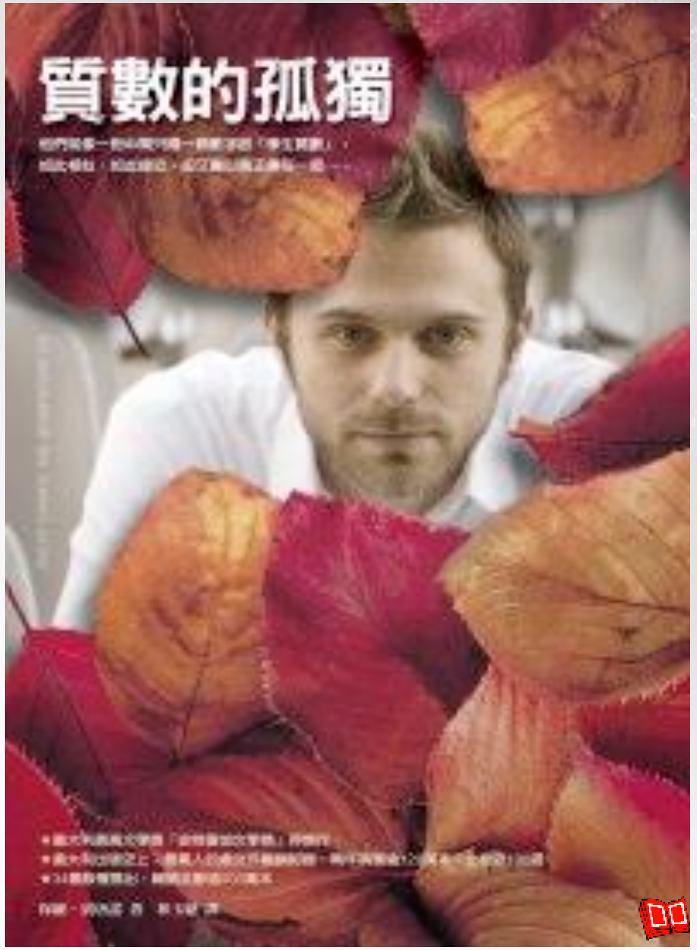
被稱為**幾何之父的**古希臘數學家歐幾里德(公元前 325 年—公元前 265 年)，在其著作《幾何原本》第 9 卷第 20 命題，運用了反證法證明「質數有無限多個。」

孿生質數

- 一對質數，它們之間相差 2。
- 例如 (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193),(197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313),.....

數學與閱讀

- 《質數的孤獨》
- 作者：保羅．裘唐諾
- 原文作者：
- Paolo Giordano
- 譯者：林玉緒
- 出版社：寂寞
- 出版日期：2009/11/30



摘自《質數的孤獨》 P.587

- 它們在自然數的無盡序列中，乖乖地待在自己的位置上，跟其他數字一樣擠在另外兩個數字之間，但彼此的距離又比其他數字更遠一步。這些懸疑又孤獨的數字，讓馬提亞覺得非常神奇。有時候他認為它們是被錯置在那個序列當中，就像被困在一條項鍊中的小珍珠；有些時候，他則懷疑這些質數其實也很希望跟其他數字一樣，當個普通的數字，卻由於某種原因，它們沒有這種能力。....,
- 質數當中還有一些更特別的數字，數學家稱之為『孿生質數』，這是一對彼此非常接近的質數，幾乎是緊緊相鄰，但它們之間總會存在著一個偶數，讓他們無法真正的在一起，....

摘自《質數的孤獨》 P.587

- 如果有耐性的一直數下去，將會發現這種孿生質數變得越來越少見，越來越常碰到的是孤立地質數，迷失在全是由數字所組成的安靜、整齊的空間裡。接著你會很痛苦地意識到，孿生質數一直要等到意外事件發生的時候才會碰在一起，而它們真正的宿命是注定一輩子孤獨。然後，當你正準備要放棄、不想繼續算下去的時候，卻又碰上了另外一對孿生質數，他們緊緊地抓住對方。於是數學家之間有一種共同的信念，就是盡量地往前數，總會遇上另外一對孿生質數，雖然沒有人知道它們何時會出現，但一定會碰到。

歌德巴赫猜想（Goldbach Conjecture, 1742年）

任何一個大於 2 的整數都可以寫成三個質數之和。

6 = 2 + 2 + 2, 10 = 2 + 3 + 5, 21 = 3 + 7 + 11, 46 = 2 + 13 + 31,……

■強哥德巴赫猜想（歐拉的版本）

■「任何一個大於 2 的偶數都可以寫成兩個質數之和。」

■弱哥德巴赫猜想

■「任何一個大於 5 的奇數都可以寫成三個質數之和。」

歌德巴赫猜想（Goldbach Conjecture）

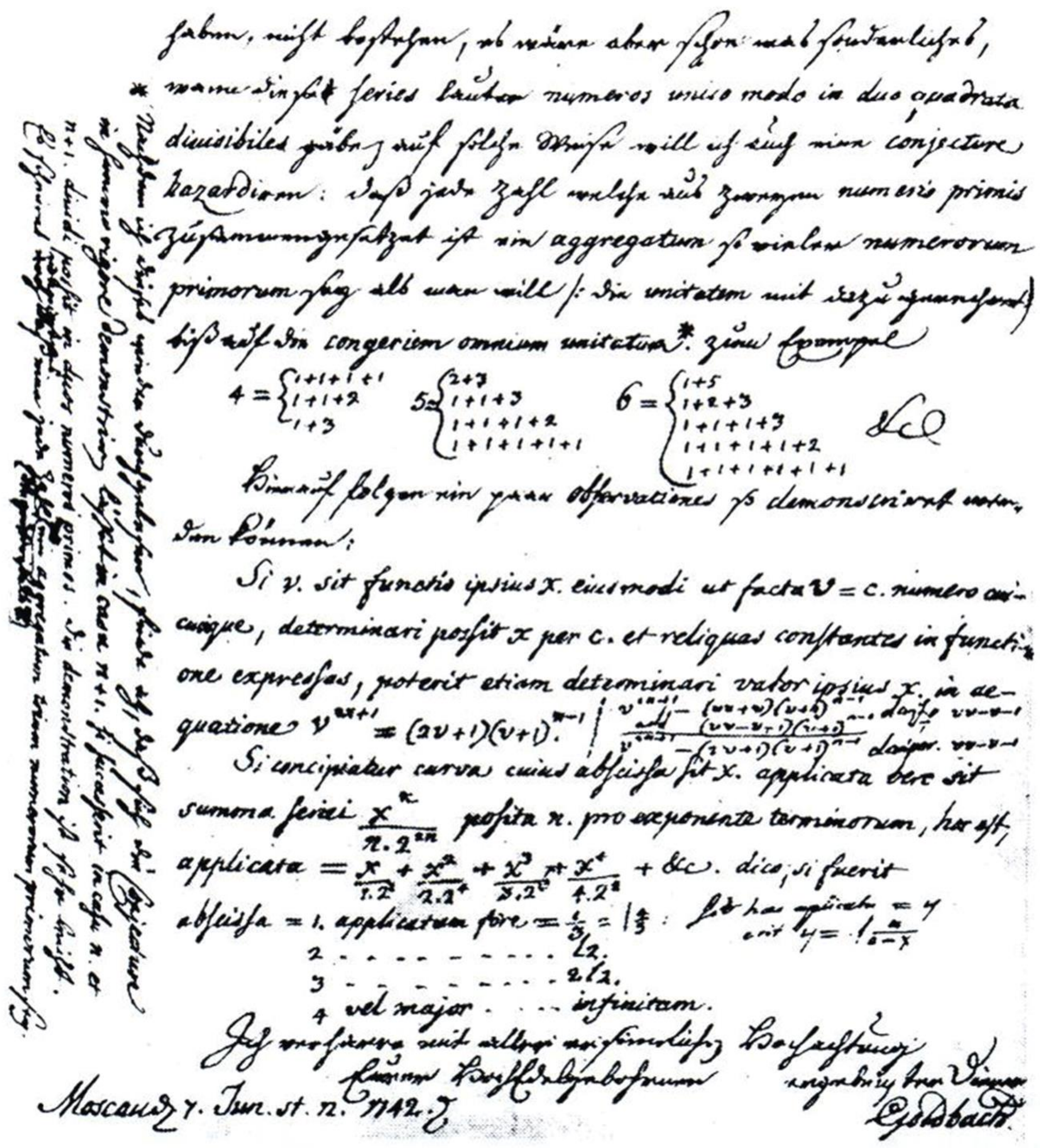
任何一個大於 2 的整數都可以寫成三個質數之和。

6 = 2 + 2 + 2, 10 = 2 + 3 + 5, 21 = 3 + 7 + 11, 46 = 2 + 13 + 31,……

6 = 2 + 2 + 2 = 1 + 2 + 3, 5 = 1 + 2 + 2, 4 = 1 + 1 +2,
3 = 1 + 1 + 1

- 當時 1 被視為質數，所以上面的式子是成立的。
- 修正後的哥德巴赫猜想

任何一個大於 5 的整數都可以寫成三個質數之和。



德國數學家哥德巴赫寫給瑞士數學家歐拉的信件手稿原文用德文和拉丁文寫成。

歌德巴赫猜想(Goldbach Conjecture)

- 2013 年祕魯數學家賀夫各特 (Harald A. Helfgott) 證明 (用電腦計算驗證) 了弱哥德巴赫猜想。
- 哥德巴赫猜想發表至今已二百多年了，直到今天仍然沒有完整證明。
- 許多數學家與民間科學愛好者對哥德巴赫猜想有興趣，爭相研究這猜想的證明，但進展相當緩慢。

1 不是質數的理由

- 1 只有一個因數 (就是 1)。
- 1 是所有整數的因數。
- 如果 1 是質數，那麼以下敘述就無法成立。

「對任一正整數都可以寫成幾個質數的乘積，而且這樣的寫法是獨一無二的。」

$$12 = 2^2 \times 3 = 1 \times 2^2 \times 3 = 1\times1 \times 2^2 \times 3$$
$$= 1 \times \cdots\cdots 1 \times 2^2 \times 3$$

完全數、友愛數

完全數 (Perfect Number)

- 若有一正整數，它的所有真因數 (除了自身以外的正因數) 的總和恰好等於它本身，則這個數就稱為完全數 (又可稱為完美數)。
- 例如
  1) 6 的真因數有 1, 2, 3
     6 = 1 + 2 + 3
  2) 28 的真因數有 1, 2, 4, 7, 14
     28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14

完全數都是偶數嗎？

在10^{1500}以下，沒有奇完全數

1. 6 (1位)
2. 28 (2位)
3. 496 (3位)
4. 8128 (4位)
5. 33550336 (8位)
6. 8589869056 (10位)
7. 137438691328 (12位)
8. 2305843008139952128 (19位)
9. 2658455991569831744654692615953842176 (37位)
10. 191561942608236107294793378084303638130997321548169216 (54位)

完全數的性質

- 偶完全數都是以 6 或 8 結尾
- 完全數都能寫成連續自然數（正整數）之和

$$6 = 1+2+3$$

$$28 = 1+2+3+4+5+6+7$$

$$496 = 1+2+3+4+\ldots\ldots+31$$

$$8128 = 1+2+3+4+\ldots\ldots+127$$

完全數的性質

- 它們的全部因數的倒數之和都是 2。

(1) $1 + 1/2 + 1/3 + 1/6 = 2$

(2) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/7 + 1/14 + 1/28 = 2$

(3) $1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/496 = 2$

(4) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64$
$+ 1/127 + 1/254 + 1/508 + 1/1016 + 1/2032$
$+ 1/4064 + 1/8128 = 2$

完全數的性質

- 除 6 以外，所有偶完全數均是由 1 開始的連續幾個奇數的立方和。

$$28 = 1^3 + 3^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 15^3$$

- 所有的偶完全數都是 2^{m-1} 到 2^{2m-2} 之和

$$6 = 2^1 + 2^2$$

$$28 = 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$496 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$$

$$8128 = 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$$

完全數的性質

■除 6 以外，所有偶完全數都符合以下計算結果：把它的各位數字相加，直到變成個位數，那麼這個個位數一定是1。

28：2 + 8 =10, 1 + 0 = 1

496：4 + 9 + 6 = 19, 1 + 9 = 10, 1 + 0 = 1

8128：8 + 1 + 2 + 8 = 19, 1 + 9 = 10，1 + 0 = 1

過剩數（盈數）與不足數（虧數）

- ■過剩數：若有一正整數其所有真因數的的總和，大於它本身。
  - ●例如 12 的真因數有 1, 2, 3, 4, 6。
    $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$
  - ●正整數大多是過剩數是極其普遍的。
- ■不足數：若有一正整數其所有真因數的的總和，小於它本身。
  - ●例如 8 的真因數有 1, 2, 4。
    $8 > 1 + 2 + 4$
  - ●所有的質數都是不足數。

完全數如何求出？是否有無限多個？

- 數學家們在幾千年前就提出「部分」如何求出完全數的方法。可惜的是至今仍無完整解答。
  - 目前只能分辨哪些偶數是完全數
- 是否有奇完全數？有無限多的完全數？都是尚未解決的數學難題。
  - 到 2018 年 12 月為止，共發現了 50 完全數，而這些完全數都是偶數。
  - 目前已知最大的完全數為 $2^{77232916} \times (2^{77232917} - 1)$，共有 46,498,850位數。

歐基理得發現首四個完全數的方法

- $n = 2,\ 2^1(2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$
- $n = 3,\ 2^2(2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$
- $n = 5,\ 2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$
- $n = 7,\ 2^6(2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$
- 歐基理得的公式

  數字 $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$，當 $2^n - 1$ 是個質數的時候，

  m 就會是一個偶數的完全數。

幾何原本第九卷的最後一個定理

$m = 2^{n-1}(2^n - 1)$，當 $2^n - 1$ 是個質數的時候，m 就會是一個完全數。

- 距離歐基理得時代約兩千年後，數學家歐拉證明了這個定理的逆敘述亦成立，即

若 m 是個偶完全數，則 $m = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$，其中 $2^n - 1$ 是質數。

莫仙尼質數（梅仙尼質數、梅森質數）

- 法國神父莫仙尼 (Marin Mersenne, 1588-1647) 為了尋找**完全數**
- 若完全數可以 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 形式呈現，
  則 $2^n - 1$ 必定是質數。
- 當某一自然數 $M_p = 2^p - 1$，則M_p為一「莫仙尼數」(Mersenne number)
- 當 M_p 為質數時, 稱此為一「莫仙尼質數 」(Mersenne prime)。
- 如果 M_p 是個莫仙尼質數，則 p 必定是質數。

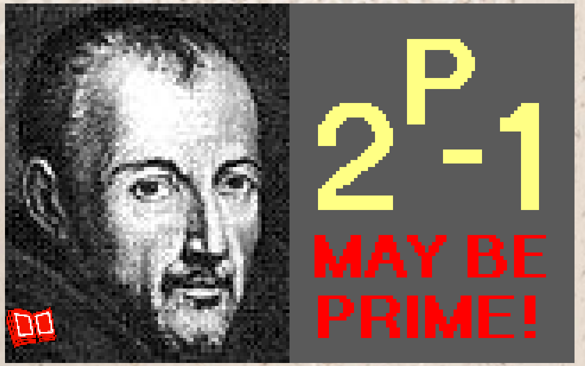
《博士熱愛的算式》書中的莫仙尼質數

根號的出生體重：3217 g

P.157

$$2^{3217}-1$$

GIMPS大網路梅森質數搜尋計畫
(Great Internet Mersenne Prime Search)



https://www.mersenne.org/

參與GIMSP

■若使用 GIMPS 的軟體發現一個新的梅森質數，就可獲得3000 美元。

■電子前線基金會 (Electronic Frontier Foundation，簡稱 EFF) 設立「合作運算獎」，計畫頒發獎金給第一個發現符合以下條件的人。

質數位數	至少 100 萬位	至少 1000 萬位	至少 1 億位	至少 10 億位
獎金 (美元)	5萬	10萬	15萬	25萬

■2017/12/26 美國電子工程師比斯 (Jonathan Pace) 發現了第50 個莫仙尼質數 $2^{77,232,917}-1$，整個寫出來會有23,249,425 位數。

■2018/12/7 住在美國佛羅里達的帕特里克（Patrick Laroche） 發現了第51 個莫仙尼質數 $2^{82,589,933}-1$，整個寫出來會有24,862,048 位數。

為何要尋找質數？

小組討論

友愛數（又稱親和數、鄉親數、友好數）

■指兩個正整數，它們彼此的全部真因數之和，與對方相等。例如

220 的全部真因數相加是：

1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284

284 的全部真因數相加是：

1+2+4+71+142=220

■又可以解釋：兩個正整數中，一方的全部因數之和與另一方的全部因數之和相等。

關於友愛數

- 傳說古希臘畢達哥拉斯發現 220 與 284 是友愛數，是人類認識的第一對友愛數。
  - 朋友是你靈魂的倩影，要像 220 與 284 一樣親密。
- 1866 年，16 歲的義大利青年巴格尼尼發現一對友愛數 (1184, 1210) 。
- 1636 年，費馬發現一對友愛數 (17296, 18416)。
- 1638 年，笛卡兒也發現了一對相親數 (9363584, 9437056)。
- 1750 年，歐拉發現 60 對友愛數 (2620, 2924)，(5020, 5564)，(6232,6368)，……。

正因為對實際生活沒有幫助數字的秩序才顯得優美。 P.148

- 「瞭解了質數的性質時，既不會給生活帶來方便，也賺不了錢。雖然數學本身遠離塵囂，但仍然有許多數學的發現應用在現實生活中。橢圓的研究成為行星的軌道，愛因斯坦運用歐基里得幾何學，提出了宇宙的形狀。就連質數也成為密碼的基本，成為戰爭的幫凶，實在太醜陋了。但這些都不是數學的目的，數學只有一個目的，就是找出真理。」

P.147

質數跳房子

課堂活動

遊戲規則示範說明

- 第一位玩家先圈選一個距離 1 不可以超過 5 步的質數。（註：學習單上是「不可以超過7步」）
- 下一位玩家圈選距離第一位玩家的質數不超過5步的質數。圈選的質數只能越來越大。
- 依此類推，直到無法圈選出符合規則的質數，就算輸了。

如何讓第一位玩家「一定」能贏得比賽？

玩家1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

玩家2

玩家1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

玩家2

尋找快樂數

學習單題目解說

■快樂數：該數字所有數位的平方和，得到的新數再次求所有數位的平方和，如此重複進行，最終結果必為1。例如

- 2 8 → $2^2+8^2=68$ → $6^2+8^2=100$ → $1^2+0^2+0^2=1$
- 3 2 → $3^2+2^2=13$ → $1^2+3^2=10$ → $1^2+0^2=1$

■不快樂數：不是快樂數的數。最後都會進入 4 → 16 → 37 → 58 → 89 → 145 → 42 → 20 → 4 的循環中。例如

- 3 7 → $3^2+7^2=58$ → $5^2+8^2=89$ → $8^2+9^2=145$ → $1^2+4^2+5^2=42$ → $4^2+2^2=20$ → $2^2+0^2=4$ → $4^2=16$ → $1^2+6^2=37$……

算一算，你的生日（例如 13 月 3 日⇒ 1301）， 是快樂數嗎？

例如 13 月 3 日，

$1303 \rightarrow 1^2+3^2+0^2+3^2=19 \rightarrow 1^2+9^2=82 \rightarrow 8^2+2^2=68 \rightarrow$

$6^2+8^2=100 \rightarrow 1^2+0^2+0^2=1$

4-2. 不考慮上述的快樂數定義，請寫下你對快樂數的定義，並說明如此定義的理由。

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

什麼是「烏蘭現象」？

網路查資料，尋找學習單第五題的質數故事。

參考資料

- 《博士熱愛的算式》(第 3 版)，作者 Yoko Ogawa，譯者 王蘊潔，麥田出版。
- 《質數的孤獨》，作者 保羅．裘唐諾，林玉緒譯，寂寞出版。
- 《數字奇航》，作者 Alex Bellos，譯者 胡守仁，時報出版 。
- 《數學與數學家的故事》，凡異出版。
- https://pansci.asia/archives/117242
- https://hk.thenewslens.com/article/87022
- https://www.mersenne.org/

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
1	8			質數的孤獨，作者：保羅．裘唐諾。原文作者：Paolo Giordano，譯者：林玉緒，出版社：寂寞；依據中華民國著作權法第 46、52、65 條合理使用 https://www.booklife.com.tw/%E8%B3%AA%E6%95%B8%E7%9A%84%E5%AD%A4%E7%8D%A8/action-products_detail-lid-1-did-3097.htm
2	13			Wikimedia Commons Christian Goldbach, 7 June 1742, and user: Gian- (talk | contribs) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Letter_Goldbach-Euler.jpg This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET
3	27			Wikimedia Commons user: 竹麦魚(Searobin), MERSENNE, Marin 1588-1648, and Abb.4 from H Loeffel, Blaise Pascal, Basel: Birkhäuser 1987. DSB 9, 316-322. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Marin_mersenne.jpg This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET
4	29			Wikimedia Commons GIMPS, Great Internet Mersenne Prime Search - PrimeNet https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GIMPS_logo.png This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET
5	34	**頁 34**		質數的孤獨，頁 147-148。 作者：保羅．裘唐諾。原文作者：Paolo Giordano，譯者：林玉緒，出版社：寂寞 依據中華民國著作權法第 46、52、65 條合理使用