

通識博雅課程 -
數學的故事

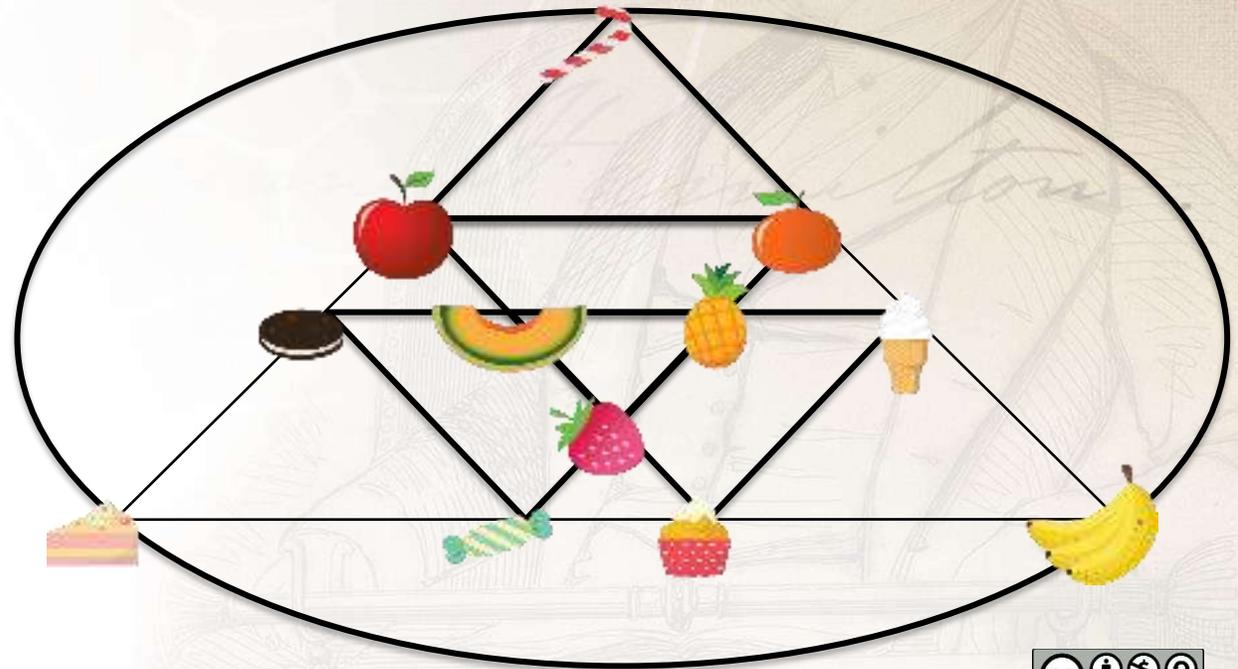
單元 2

動物園裡的數學——
一筆畫遊歷問題

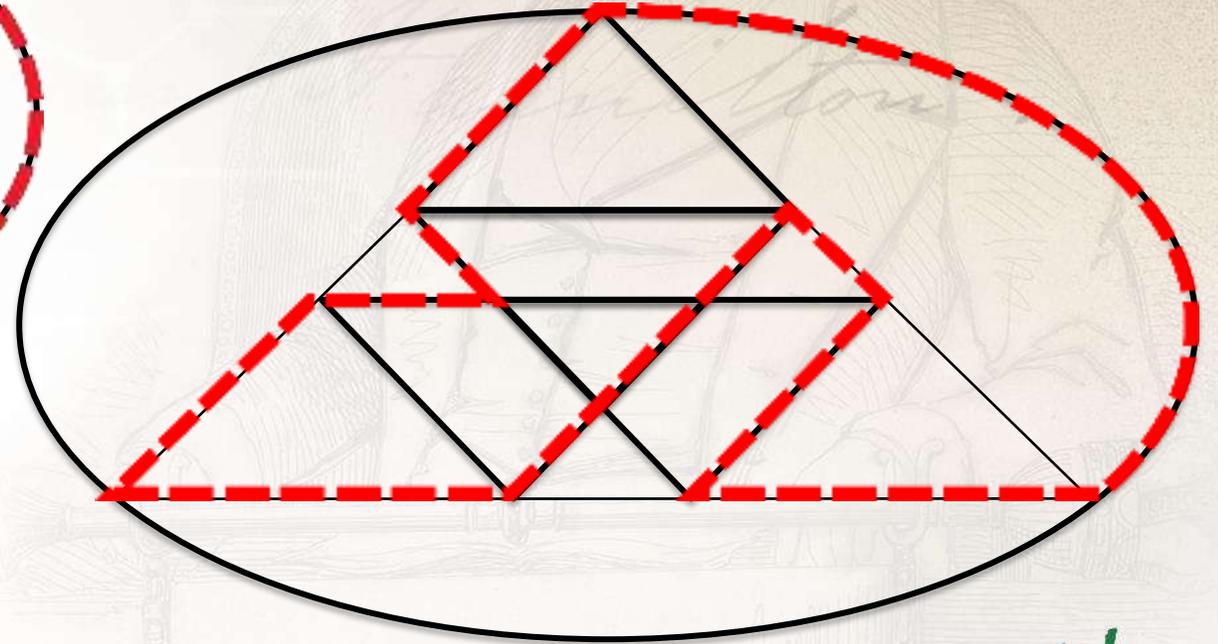
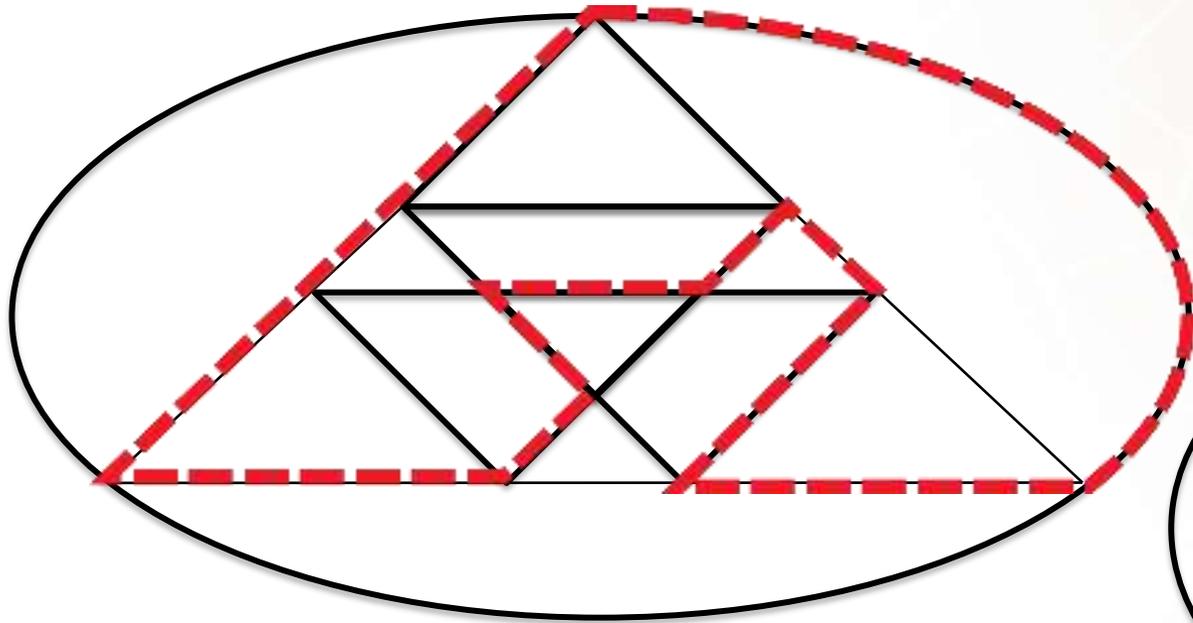
中國科技大學 徐惠莉



請幫穿山甲設計一條路線吃完所有點心，而且每一點恰好經過一次。(除了出發點和終點相同外)

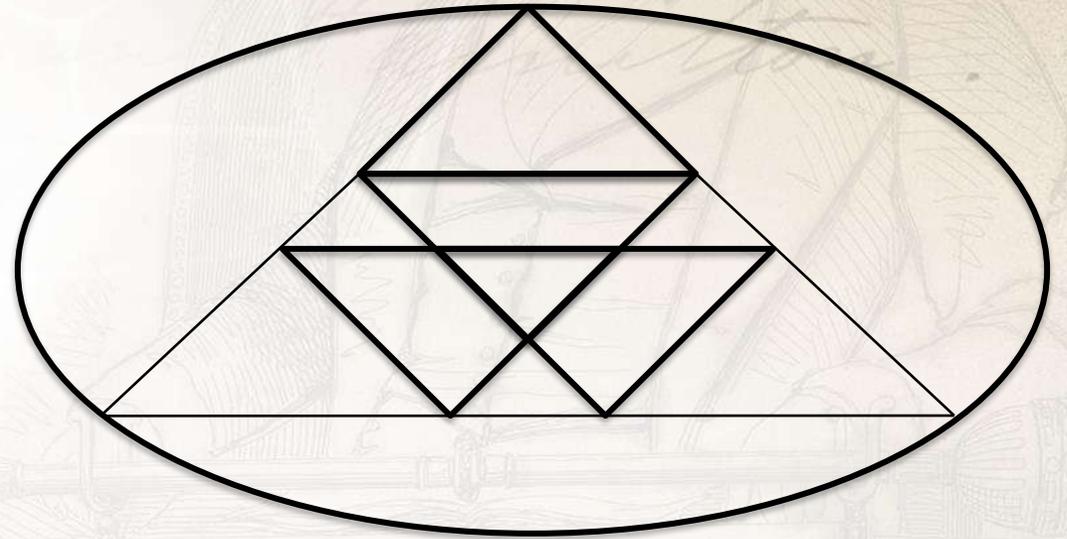


做法不只一種！



一筆畫遊歷問題

- 能否在圖形上的任一點出發，經過圖上的所有點，最後回到原出發點？
- 數學家漢米頓勳爵在1855年提出的「一筆畫遊歷問題」

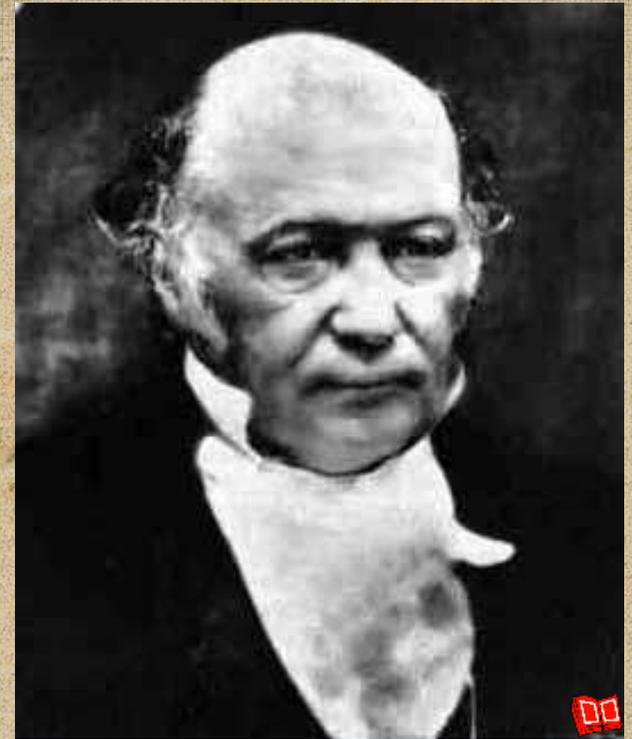


日常生活中會遇到的問題

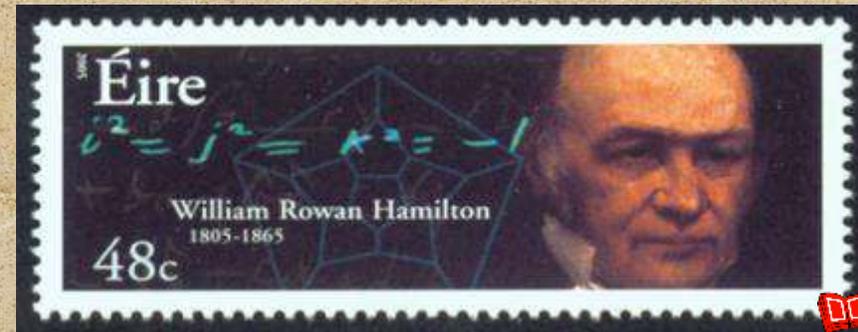
- 你是一位送貨員，今天你必須將商品送到 20 個銷售地點。你從公司出發，將貨物送到 20 個銷售地點，最後回到公司。該如何安排路線，使得不重複經過已送達的銷售點，讓路程盡可能地縮短？
- 暑假到了，你想騎機車到幾個城市旅行，可是現在汽油這麼昂貴，你想要儘量省油。汽油的消耗和路程成正比，因此你得想個法子找一個回路具有最短的路程。

漢米頓 (Sir W. R. Hamilton , 1805–1865)

- 英國數學家、物理學家。
- 語言天才，13歲已精通14種語言。
- 1827年應聘為三一學院天文學教授，同時獲得愛爾蘭皇家天文學家的稱號。
- 漢米頓對分析力學的發展做出了重要貢獻。
- 在數學上的主要貢獻是發現了「四元數」(Quaternion)。數學著作是1853年的《四元數講義》。



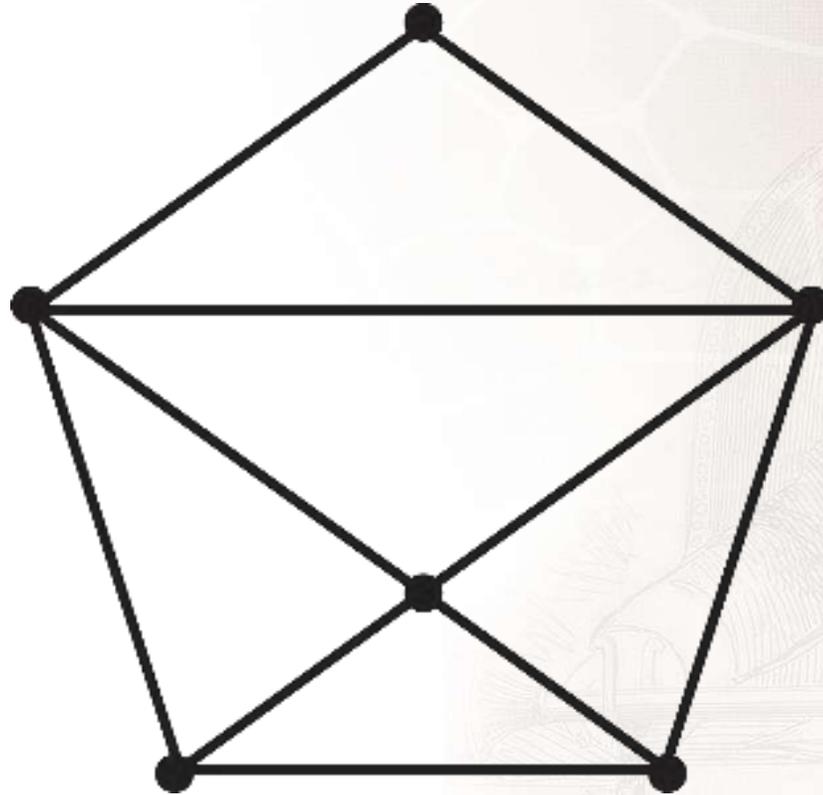
William Rowan Hamilton (1805–1865)



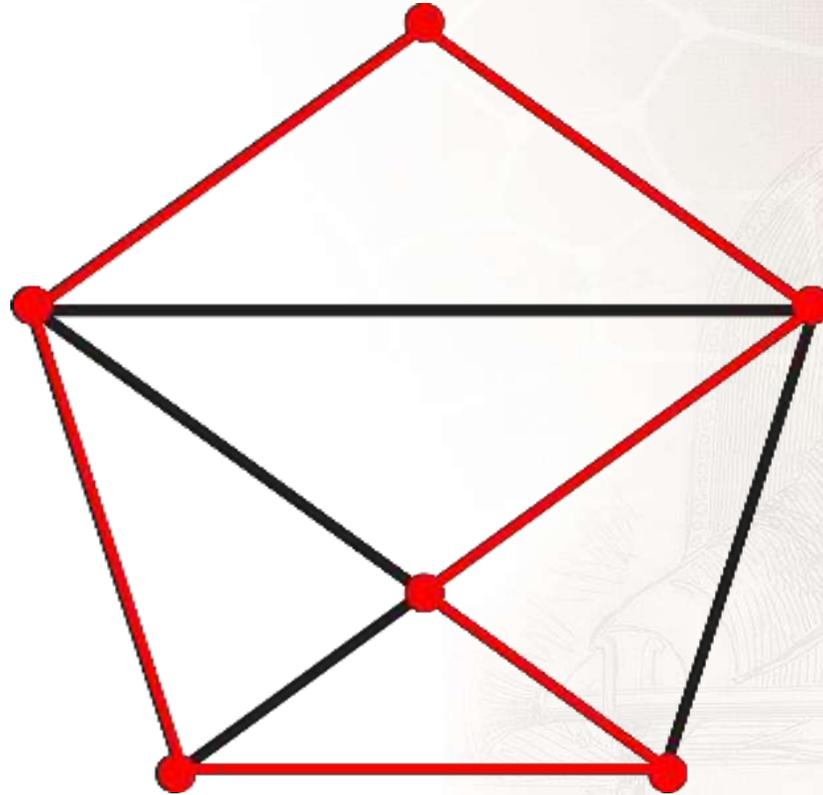
四元數是漢米頓在1843年10月16日與妻子在都柏林的皇家運河（Royal Canal）上散步時突然想到 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ 的方程解。



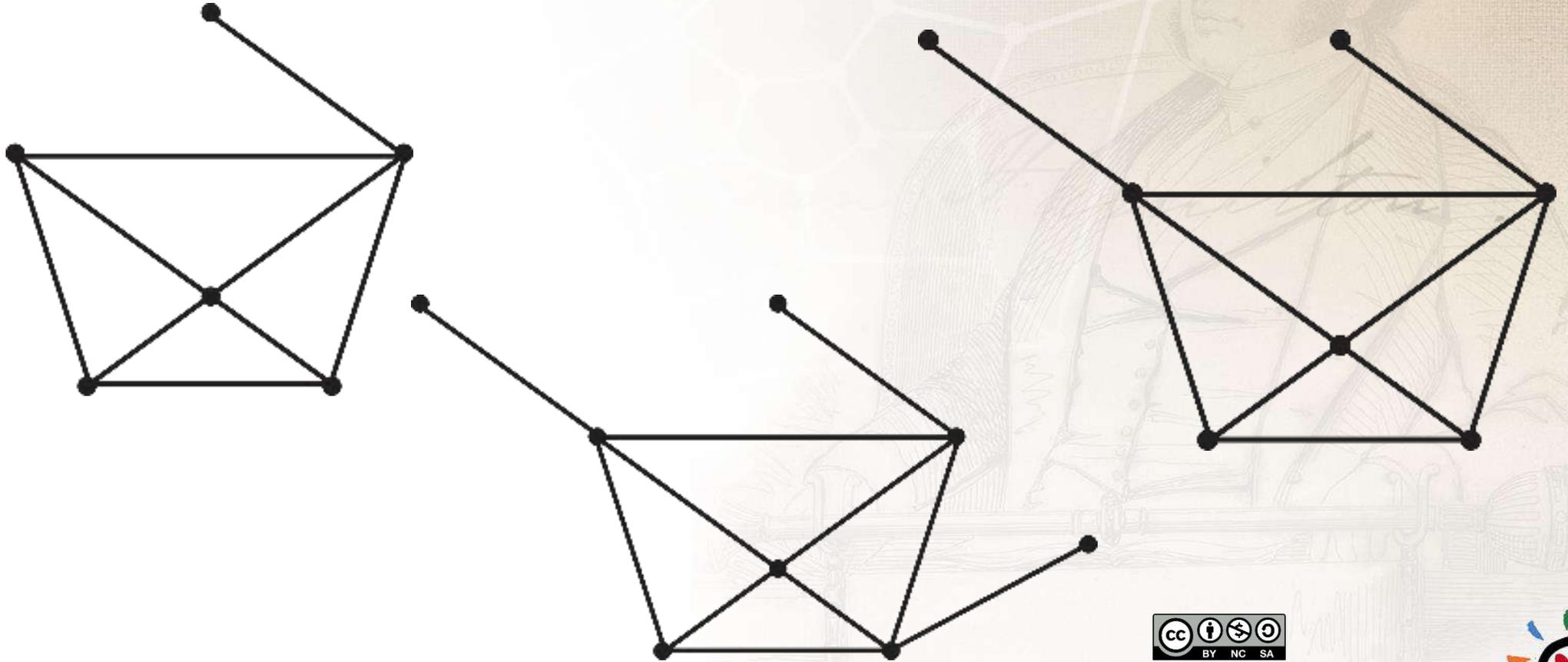
課堂練習 有漢米頓圈嗎？



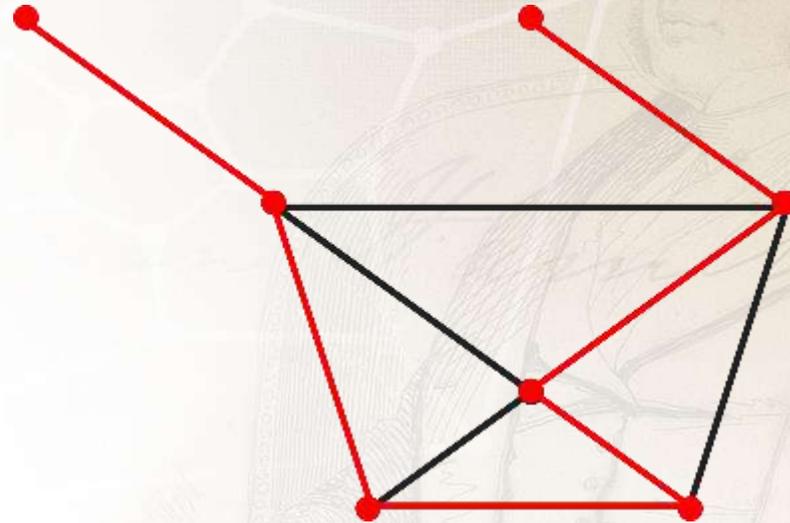
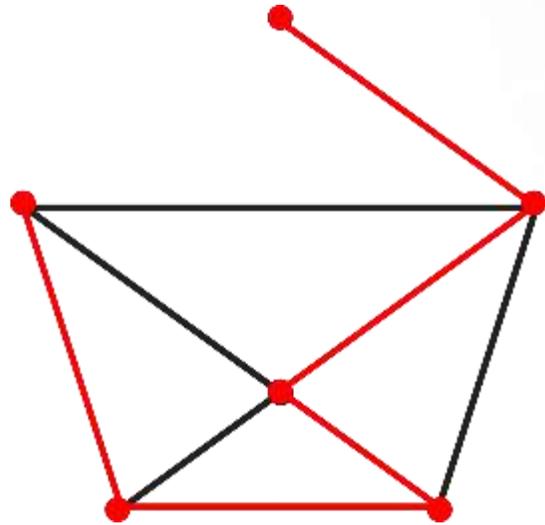
答案不只一種！



有漢米頓圈嗎？



沒有漢米頓圈，但有漢米頓路徑。

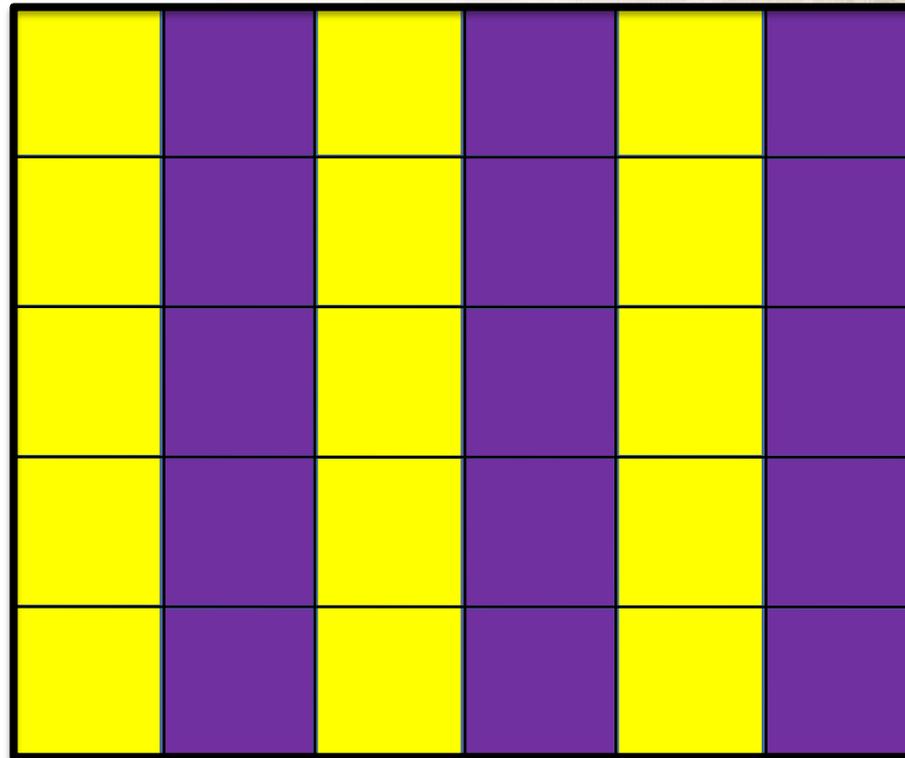
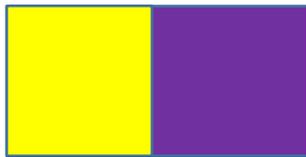


漢米頓路徑：給定任意兩點A,B，從A出發要經過所有的點且不重複點，最後到達B。

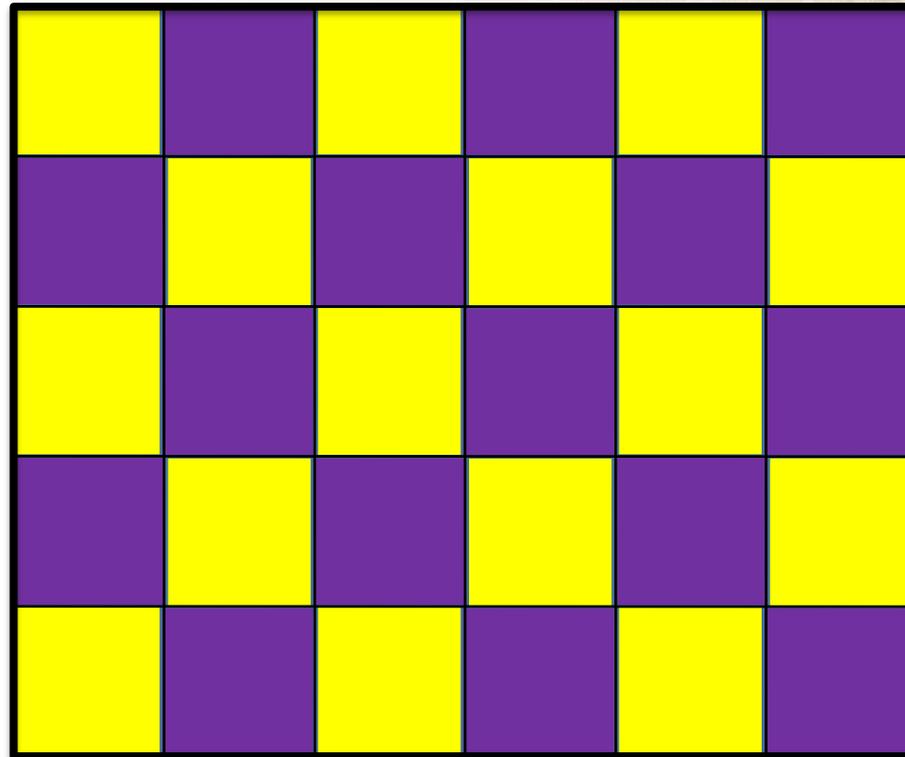
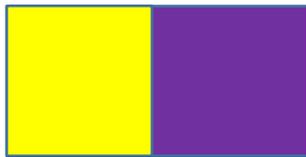
是否有個簡易的方法，來判定某個圖形中，
存在著漢米頓圈或是漢米頓路徑呢？

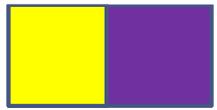
決定一個圖中是否存在漢米頓圈是非常困難的問題。

鋪瓷磚的一筆畫遊歷問題

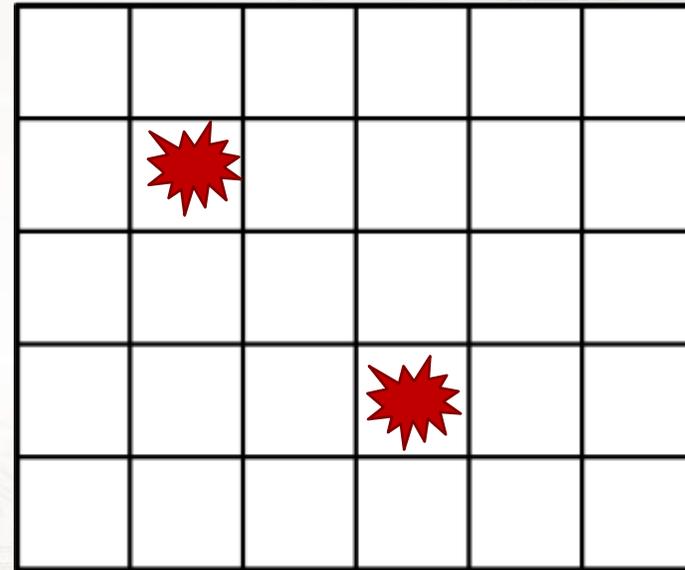
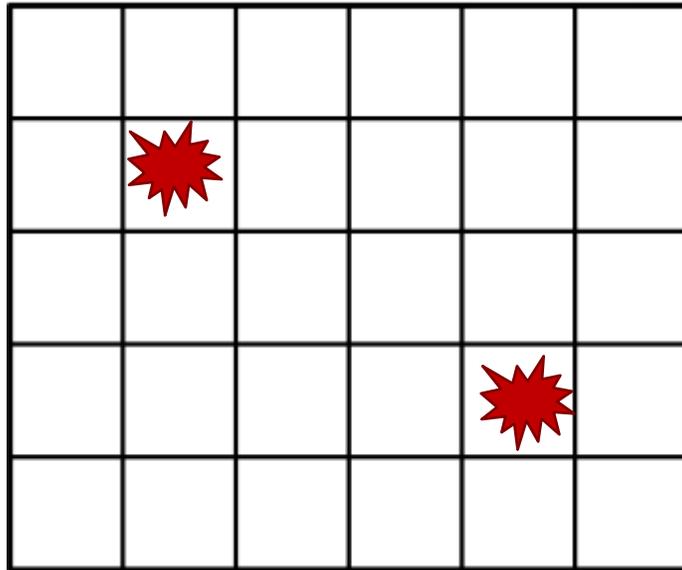


鋪瓷磚的一筆畫遊歷問題

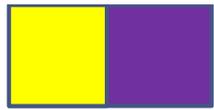


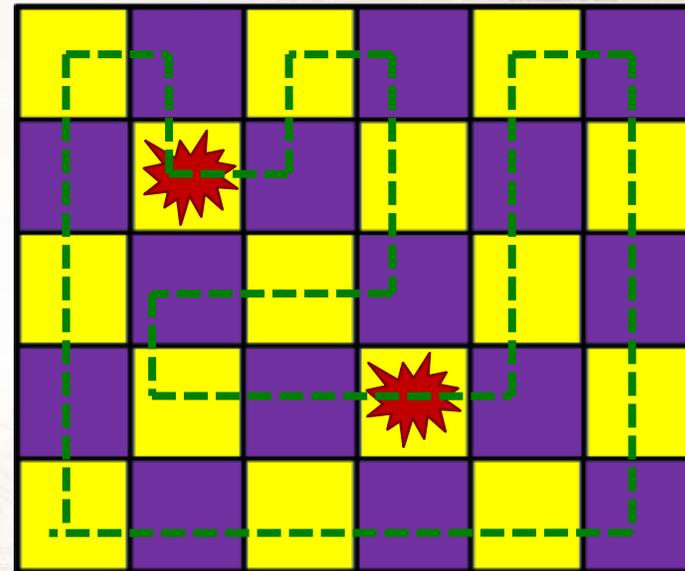
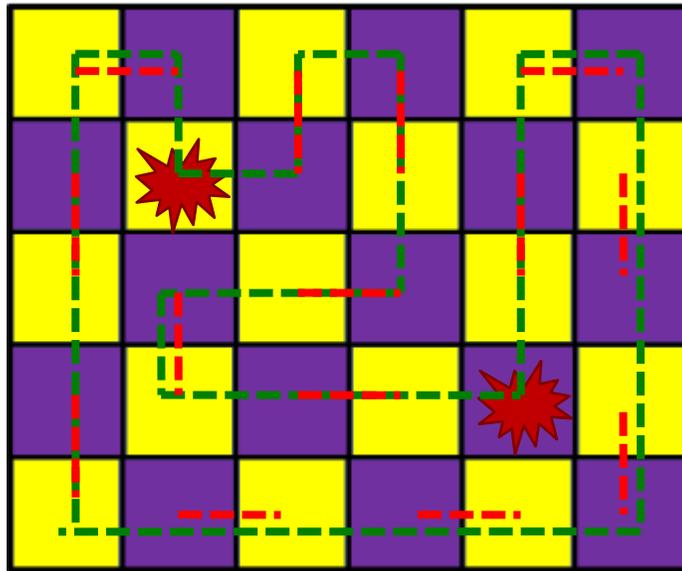


可以鋪滿下列未被破壞的地板嗎？



這樣你可以看出來哪一個不能鋪滿嗎？

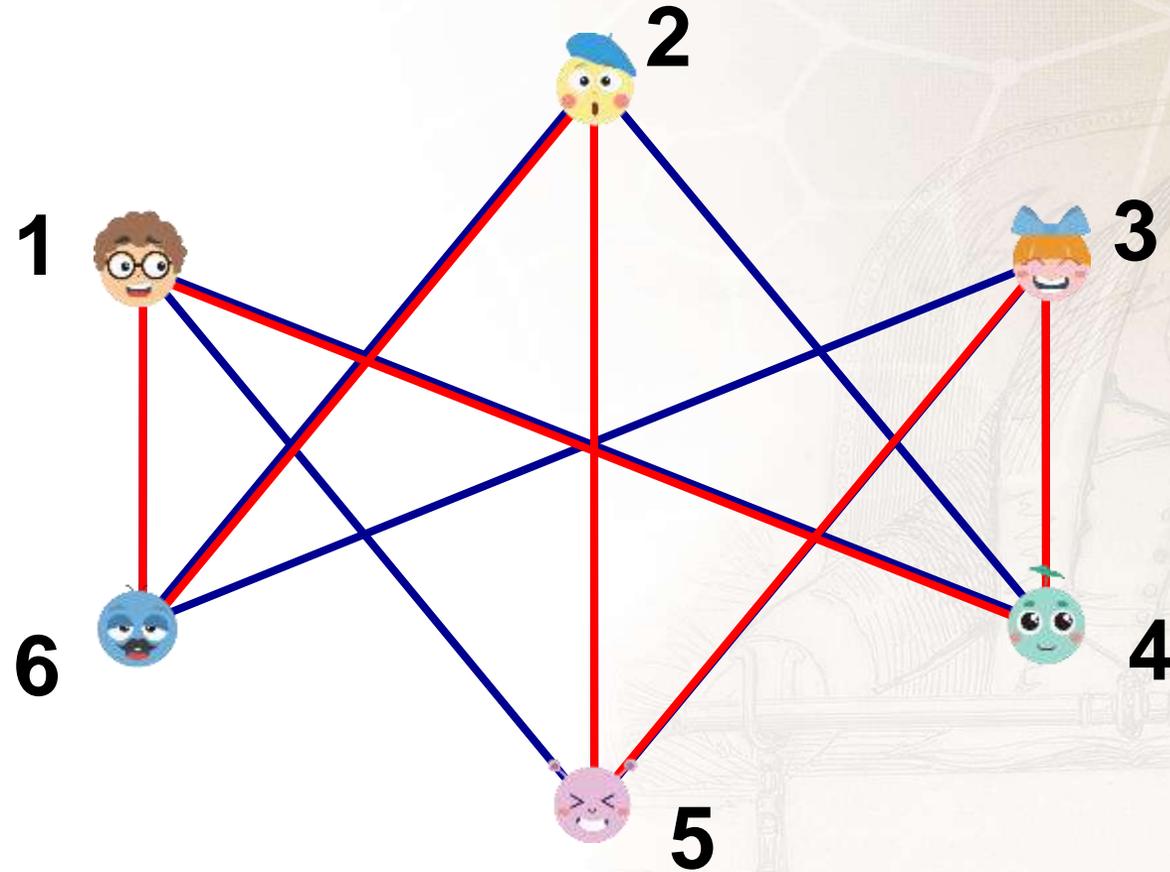
 為什麼左圖可以？右圖不行？



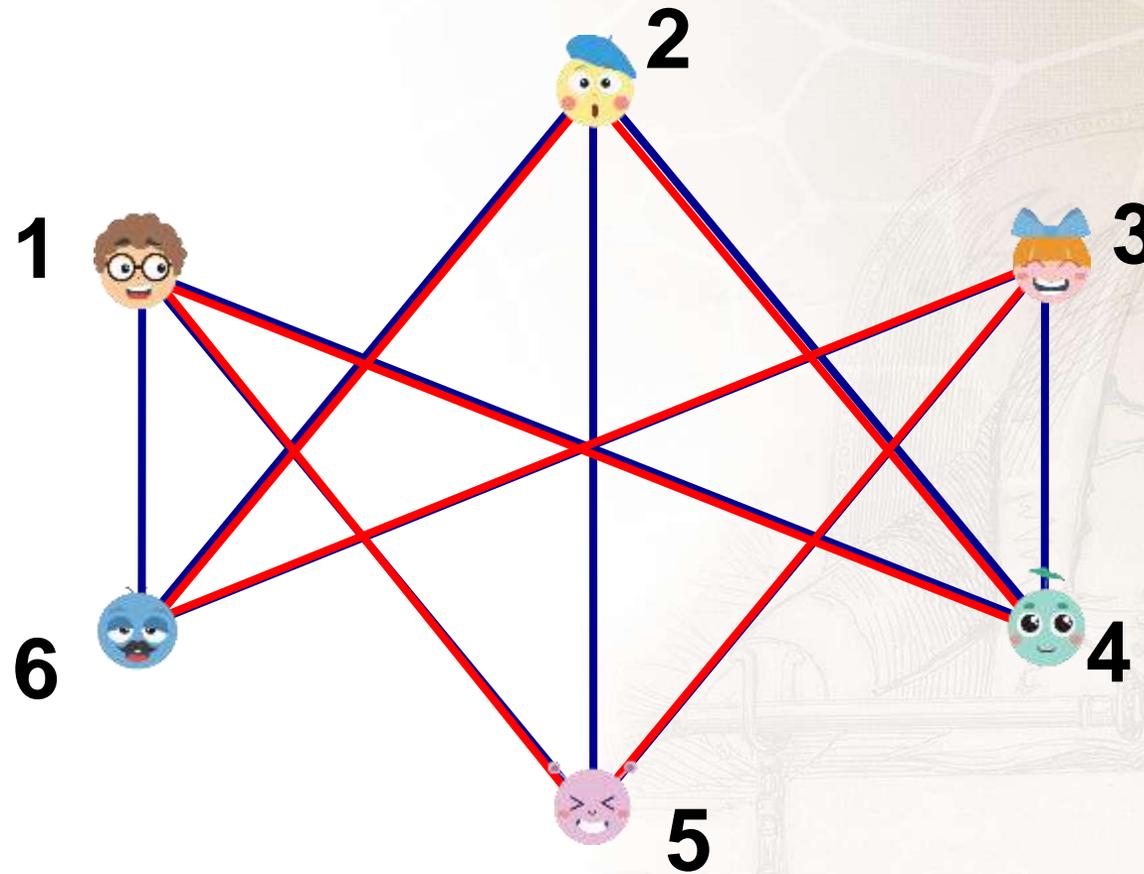
漢米頓圈與漢米頓路徑的應用

- 6 位同學在吵鬧的教室討論作業。
- 若有兩人同時講話，其他人就會聽不出來他們在說些什麼。
- 如何順利討論作業？
 - ✓ 一次只能一個人發言
 - ✓ 一位主持人賦予他人說話的權利

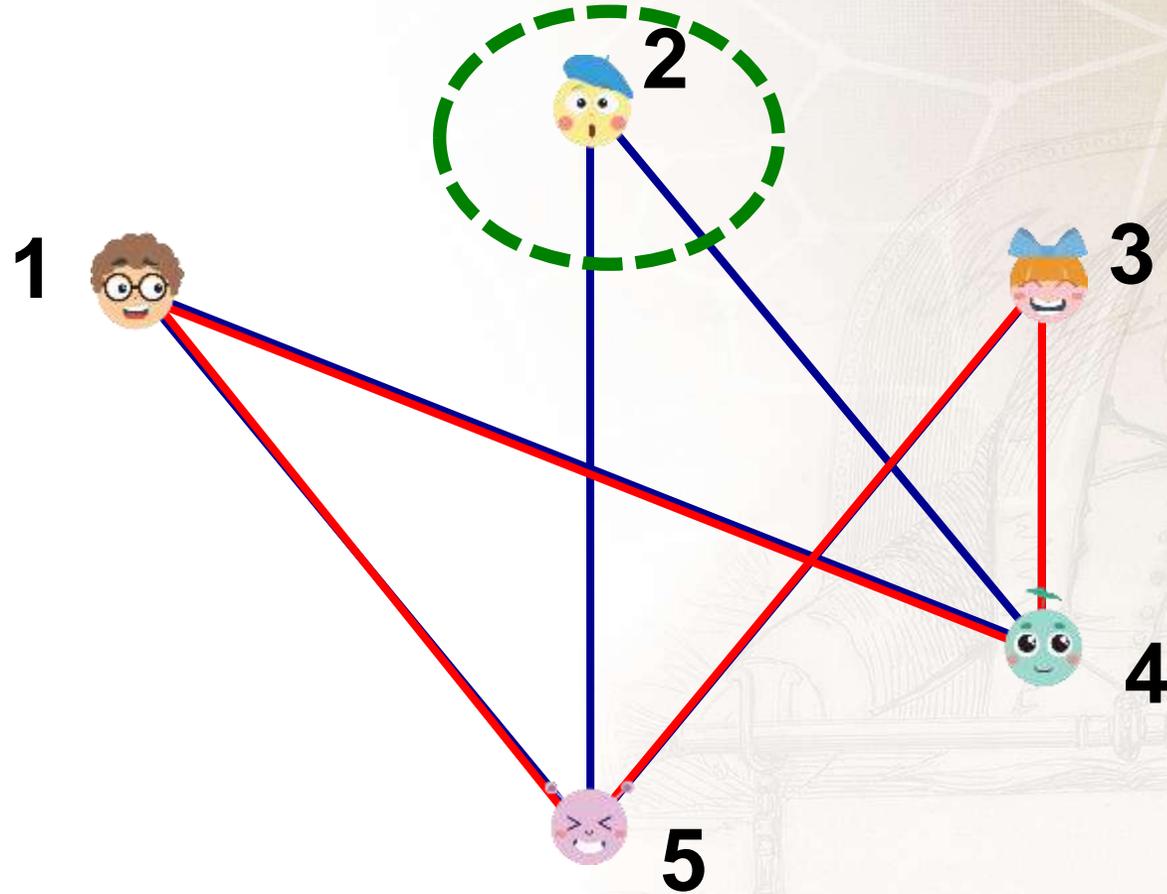
Token-Ring 之說明範例



Token-Ring 之說明範例



Token-Ring 之說明範例

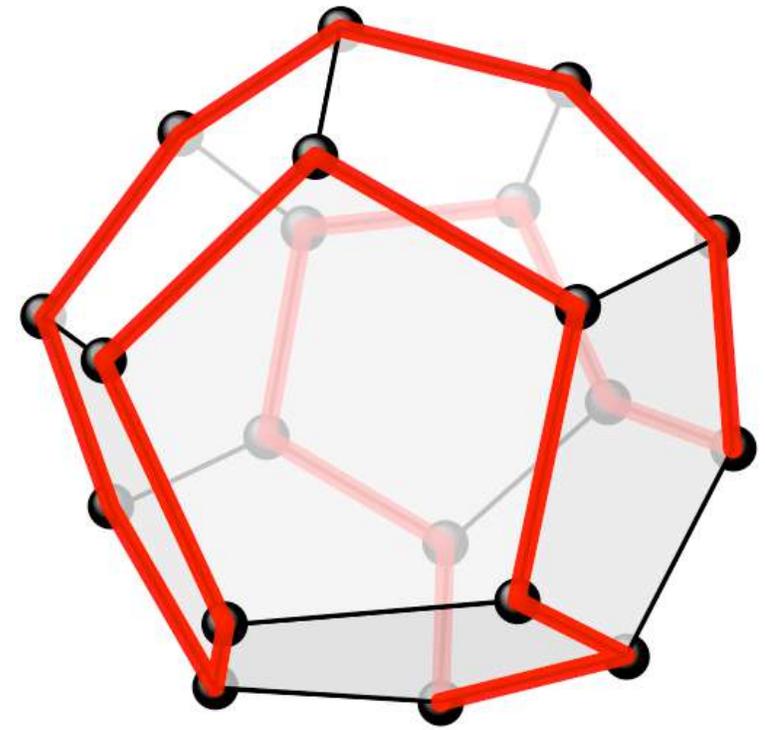


漢米頓圈與漢米頓路徑的應用

- 頂點是電腦，邊就是電腦間的連線。如果網路中發生了狀況該如何讓全網路上的電腦都知道？
- 網路連結中所謂的 token ring，就是圖形理論中的漢米頓圈與漢米頓路徑。

一筆畫遊歷問題 (Hamiltonian Graph)

- 漢米頓在1857年設計了一種環遊世界的遊戲
- 在正十二面體的二十個頂點填入 20 個都市，例如倫敦、紐約.....等，然後讓玩家任意由一個都市出發，在不重覆經過同一都市的條件下走完全部都市並回到起點。

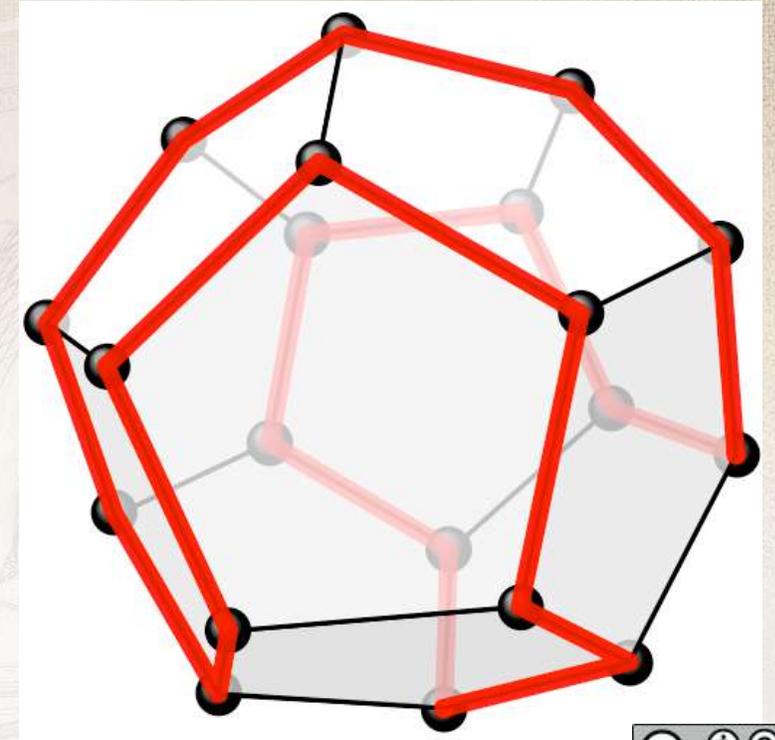




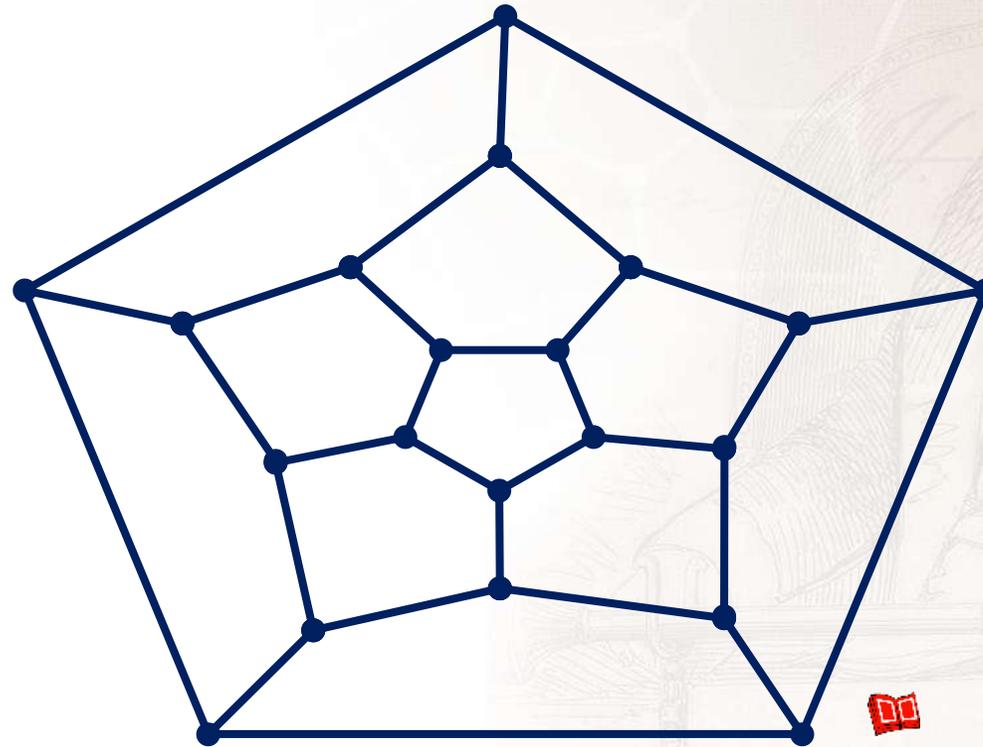
一筆畫遊歷問題 (Hamiltonian Graph)

■ 漢米頓在1857年設計了一種環遊世界的遊戲

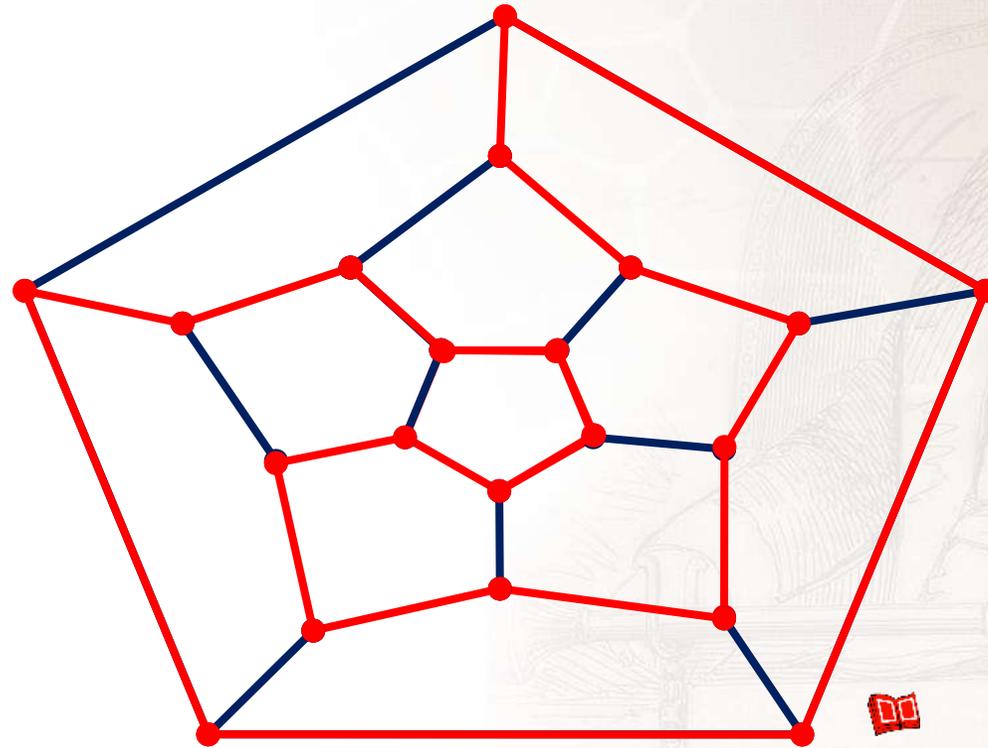
- ◆ 在正十二面體的二十個頂點填入 20 個都市，例如倫敦、紐約.....等，然後讓玩家任意由一個都市出發，在不重覆經過同一都市的條件下走完全部都市並回到起點。



找出一個漢米頓圈

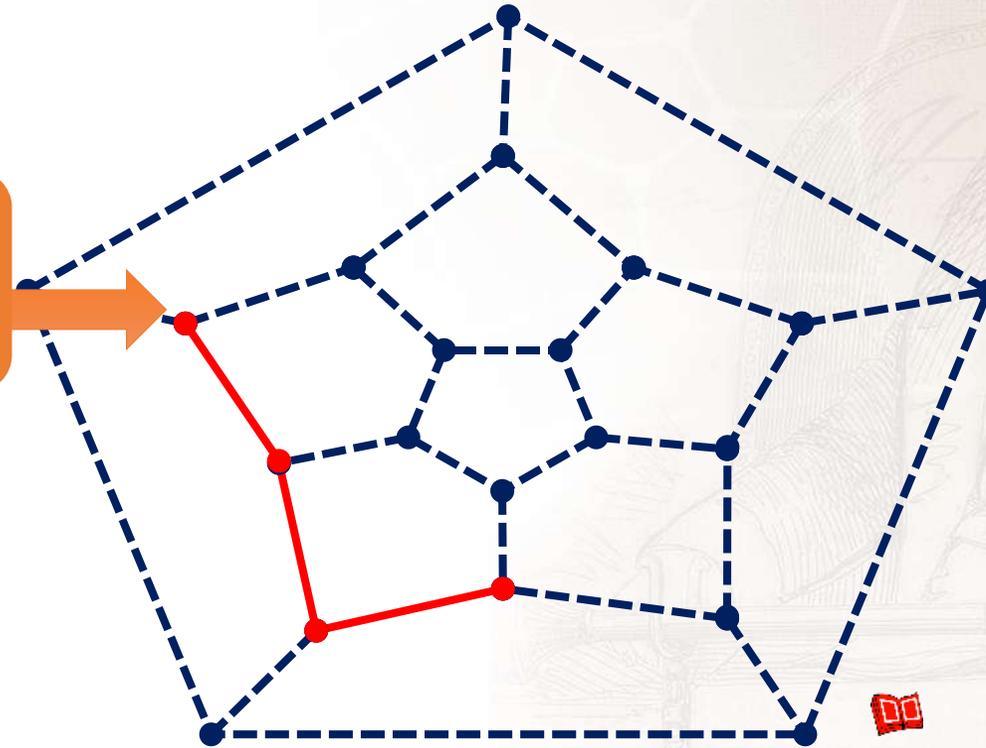


這是其中的一種解答



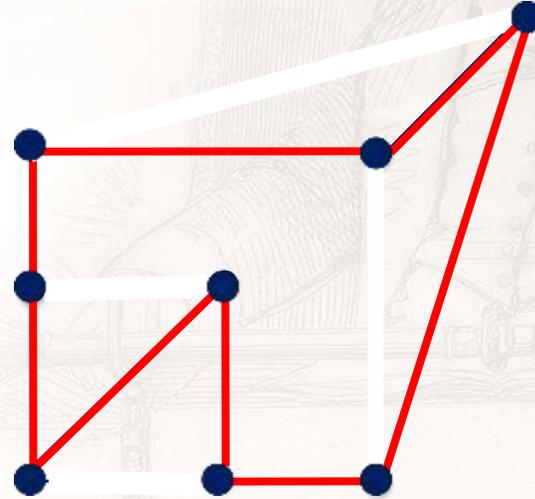
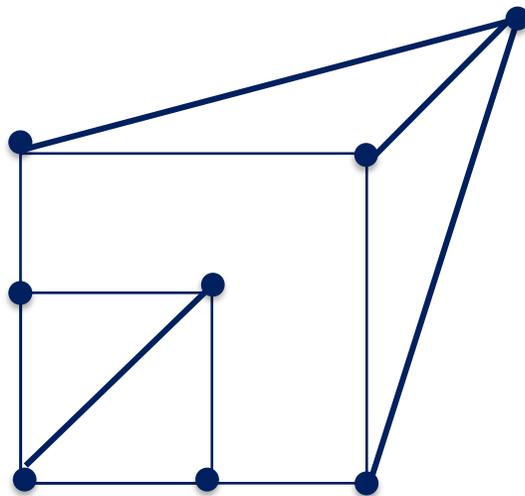
另一個玩法的漢米頓圈

紅線是一定要經過的地方



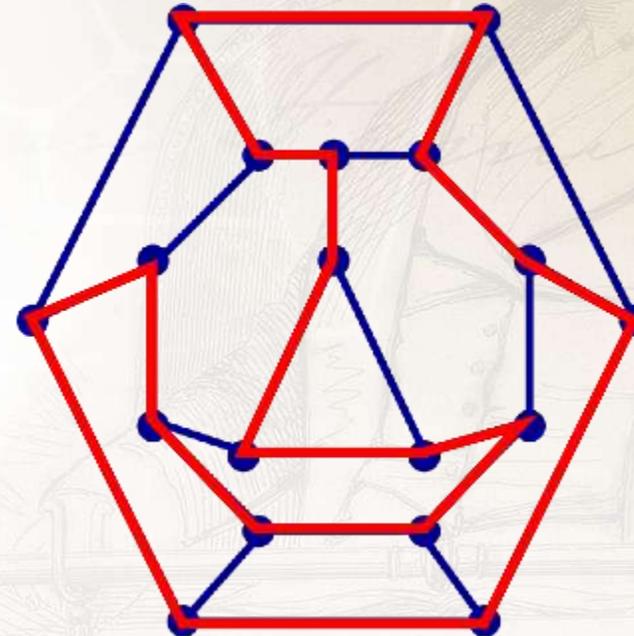
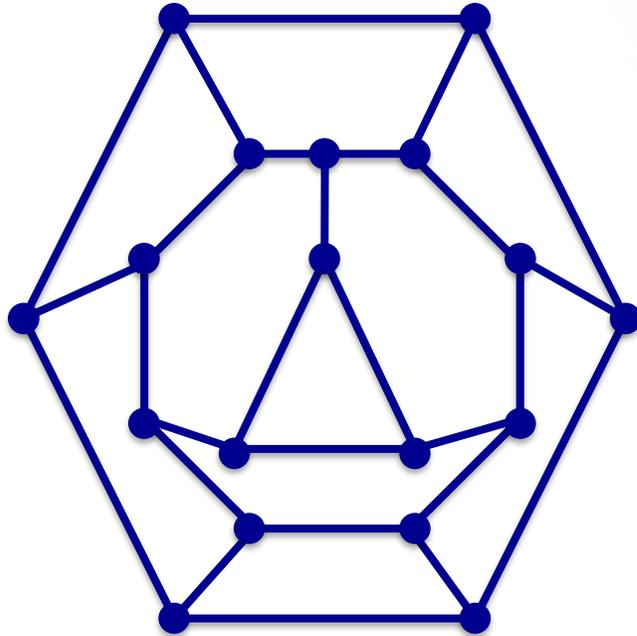
尋找漢米頓圈的參考規則

- 若頂點的次數是 2，則與它相連的兩條邊都必須畫到。
- 在你把所有的點畫到之前，畫出的路徑不能變成一個圈。
- 當一筆畫過某個點 X 之後，與 X 相連但沒被畫到邊，就可以刪除。



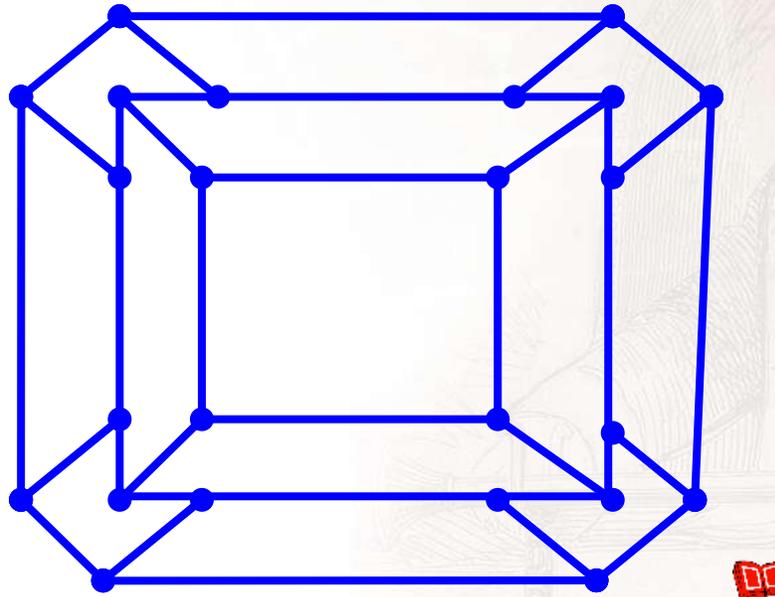
三正則圖

每個頂點都恰有 3 個出入口的圖形。



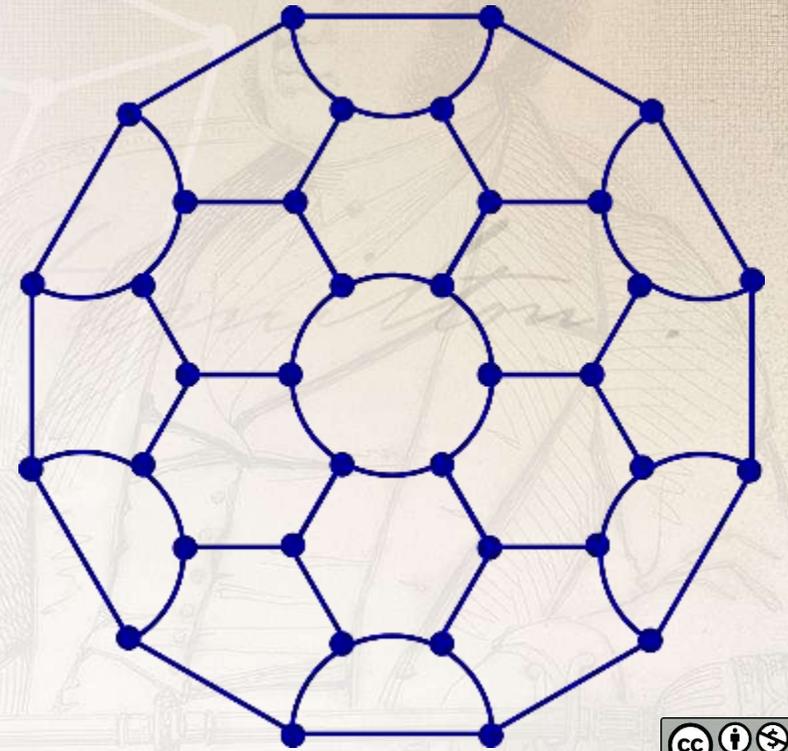
三正則圖

- 按照之前提供的參考規則，一定可以做出**一筆畫遊歷**

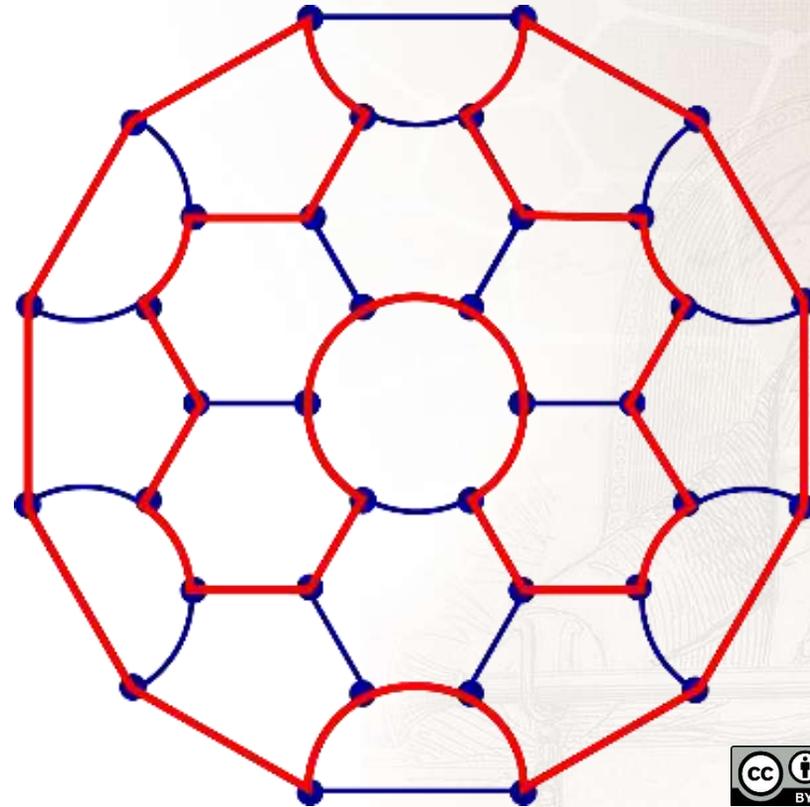


守望相助的社區

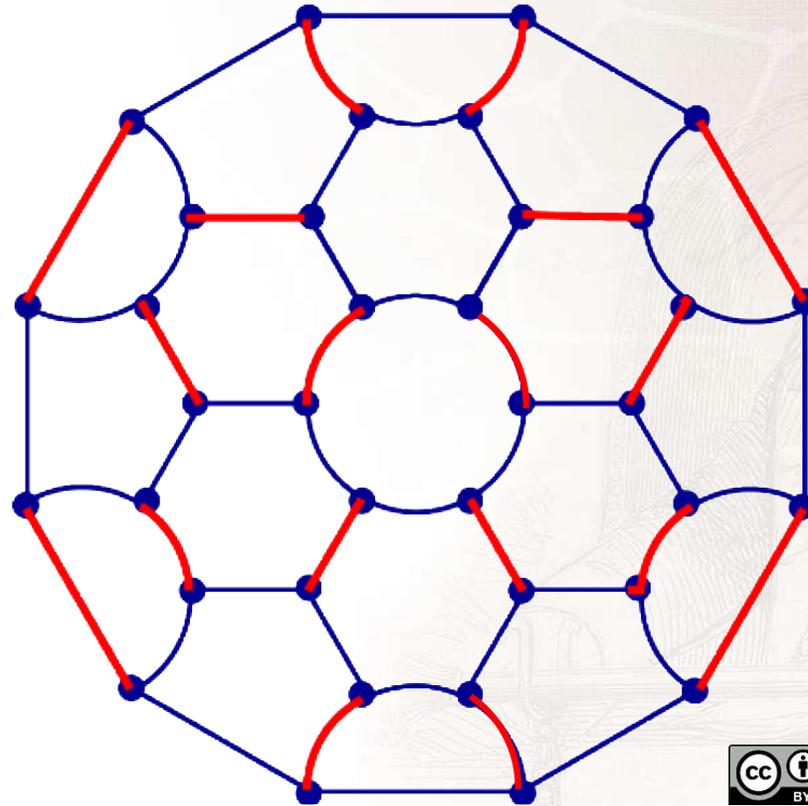
- 右圖為快樂社區的地圖。
- 每一個節點代表一戶家庭。
- 為結合社區資源，落實治安全民化。
- 兩戶為一單位，彼此合作，守望相助。
- 該如何分配合作對象？



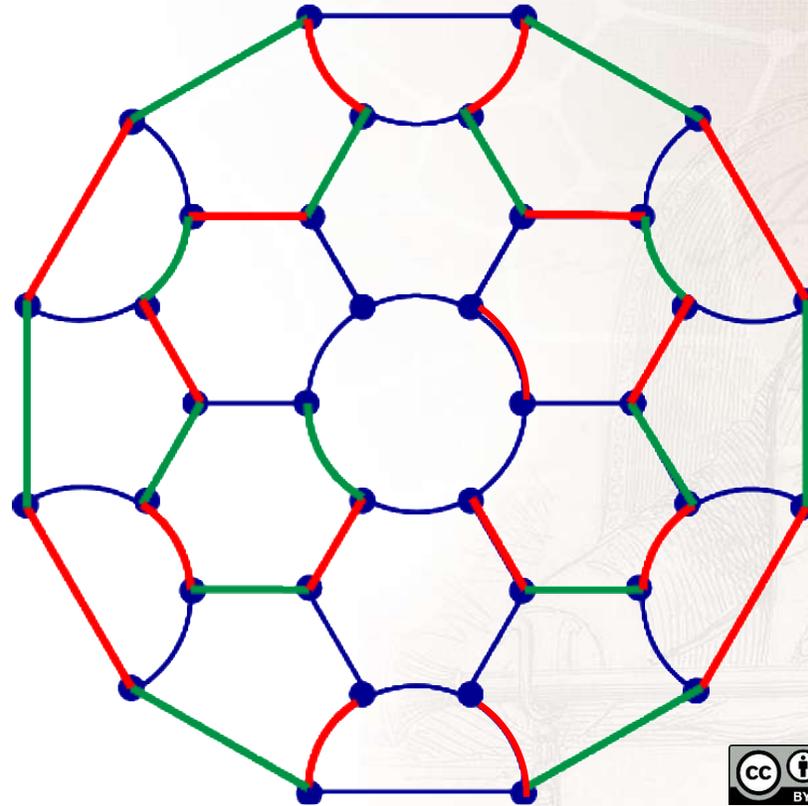
守望相助的社區



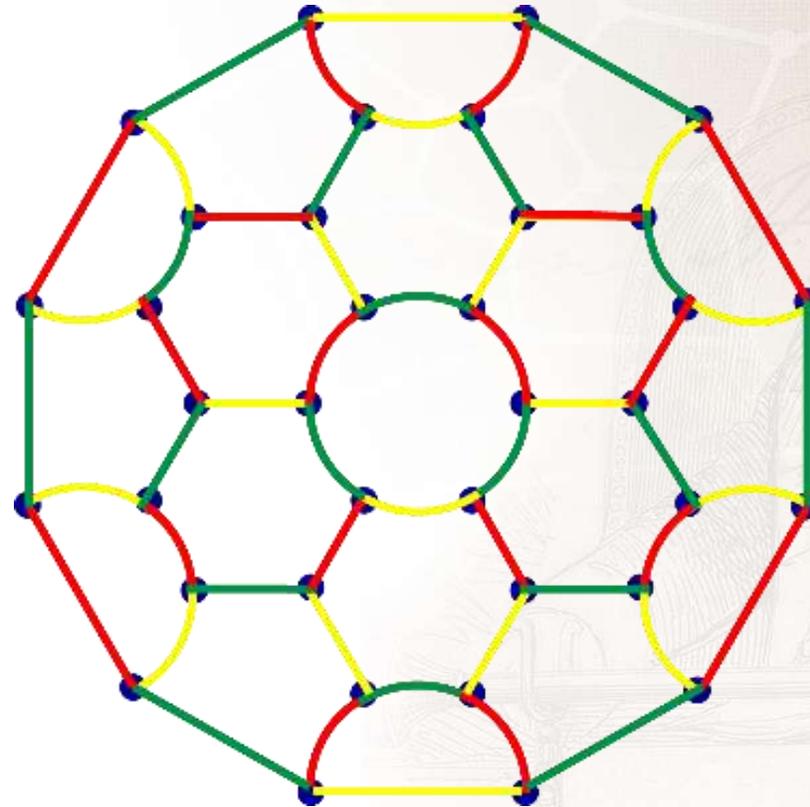
兩戶為一單位，彼此守望相助



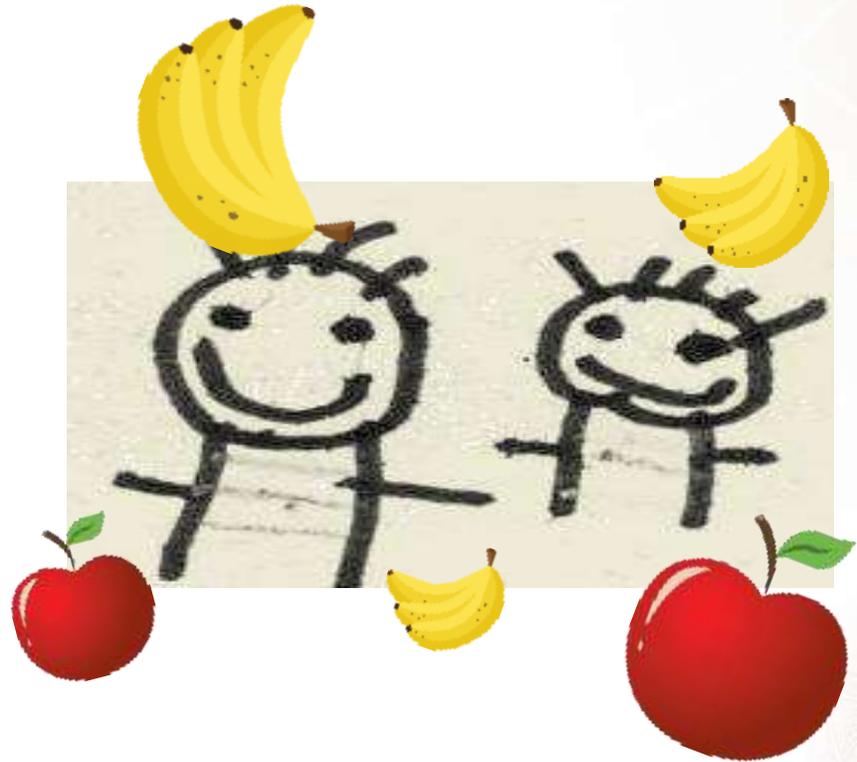
三天一循環，兩戶為一單位，
每天每戶都要和不同的隔壁鄰居守望相助。

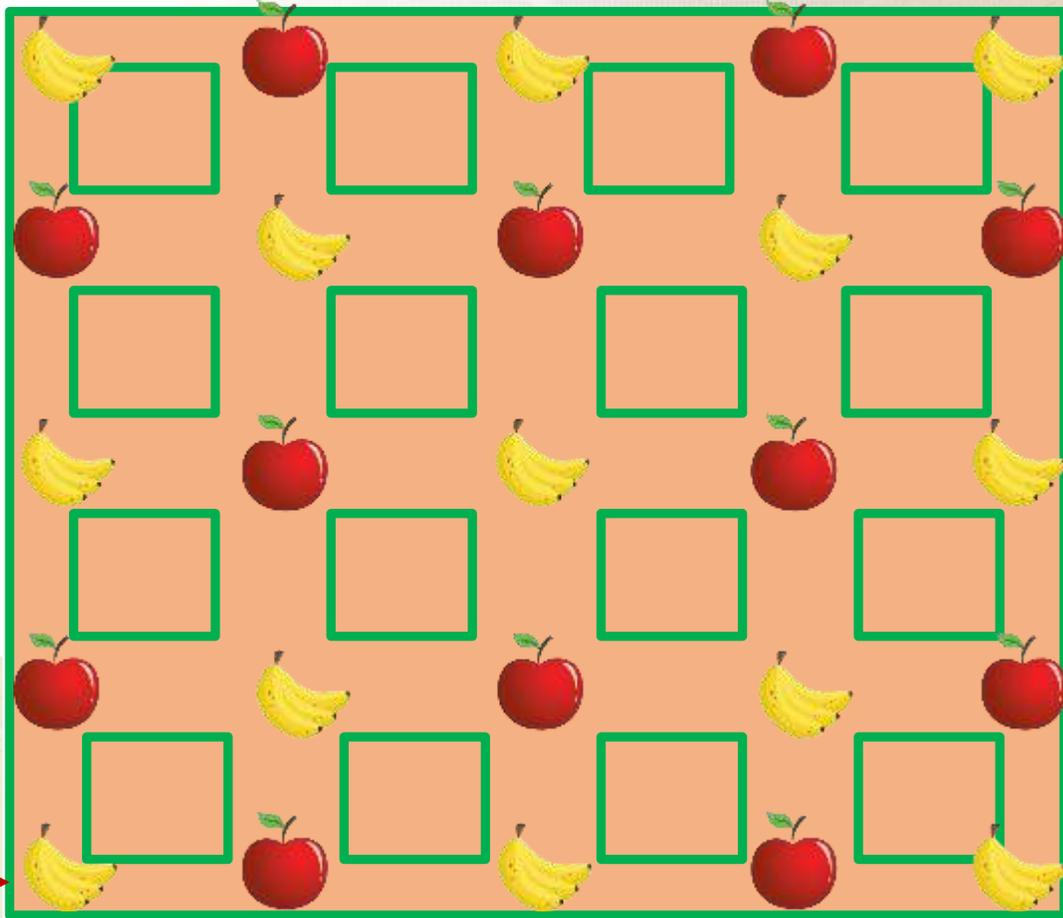
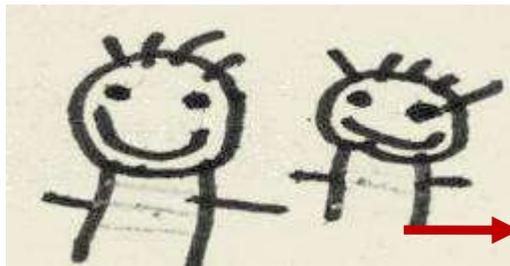


三天一循環，兩戶為一單位，
每天每戶都要和隔壁鄰居守望相助

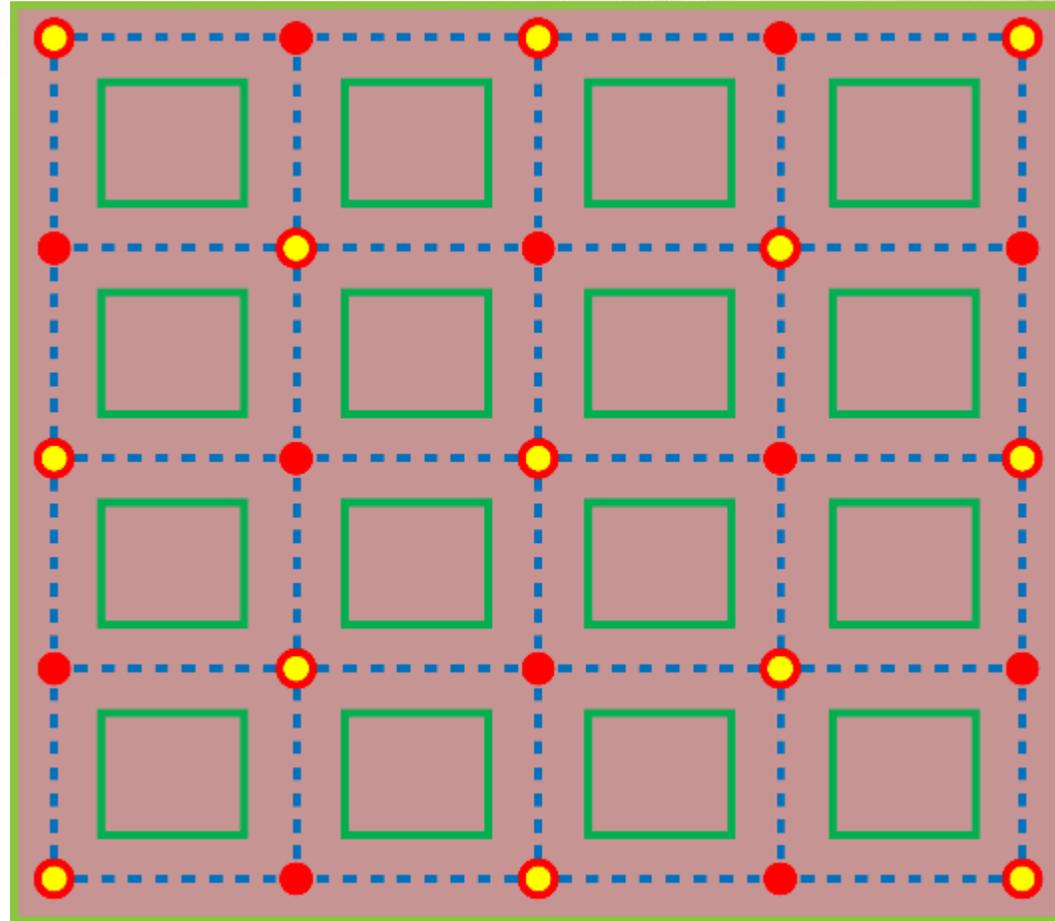
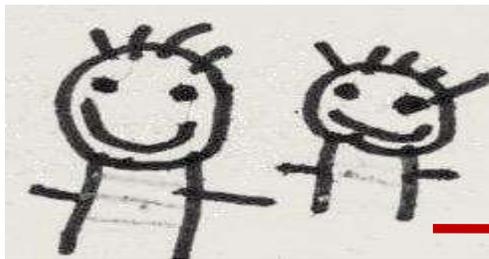


快樂小小人採水果



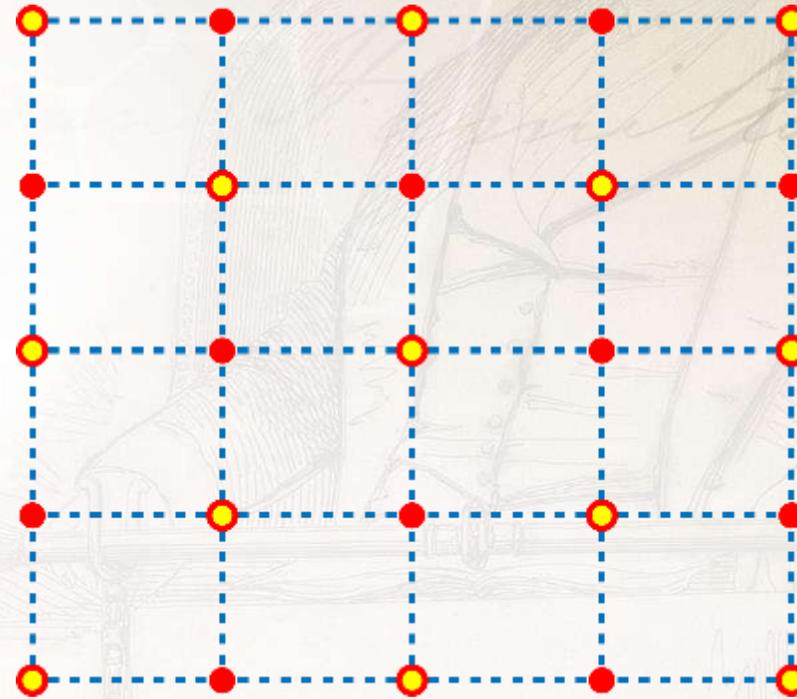
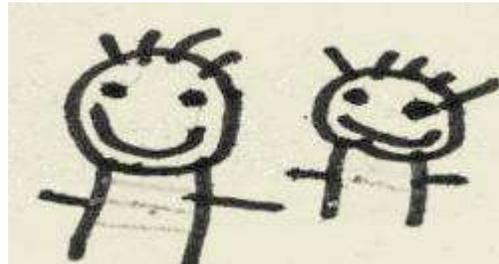


能不能做漢米頓圈？

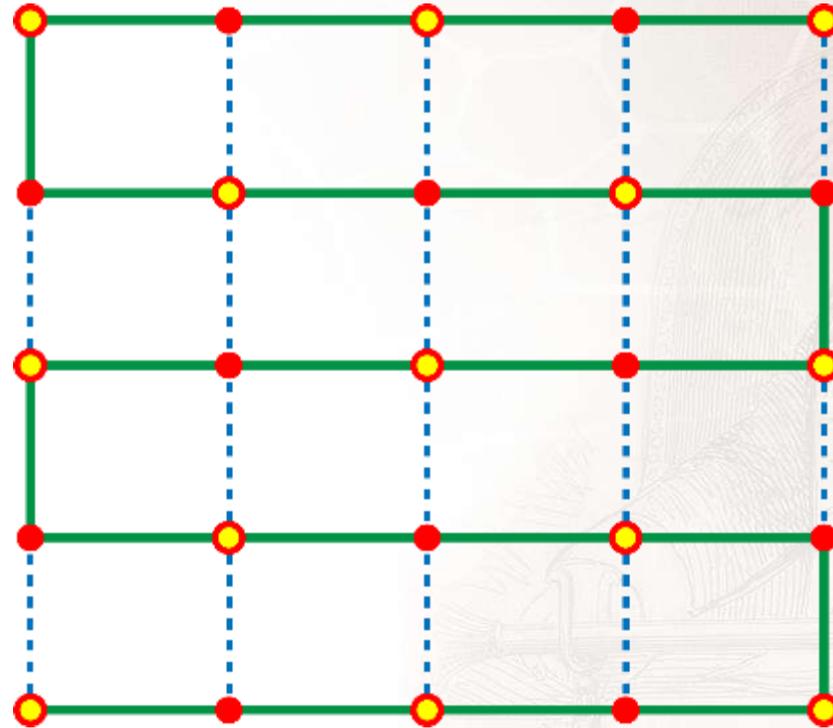


一筆畫路徑問題 (漢米頓路徑)

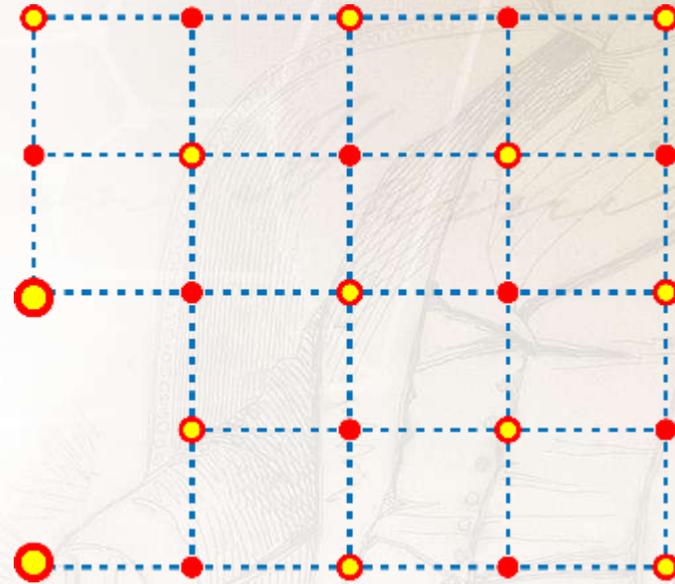
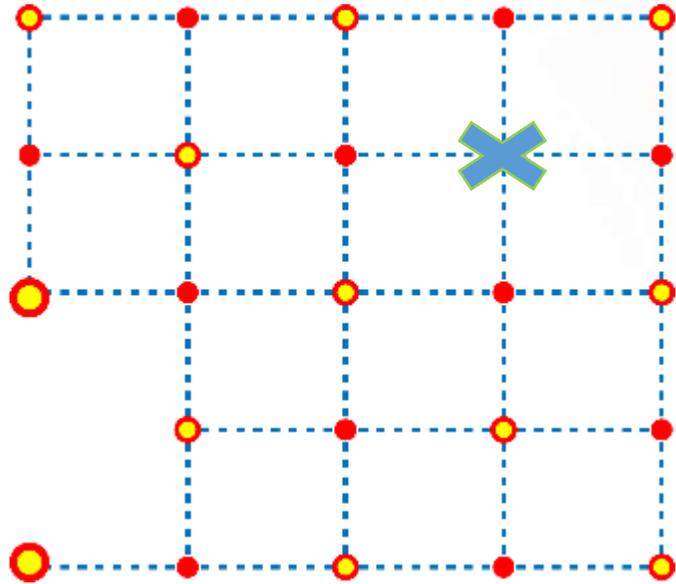
- 找出一對起點和終點(兩個不在同一點)，而有一筆畫路徑？



其中一組答案

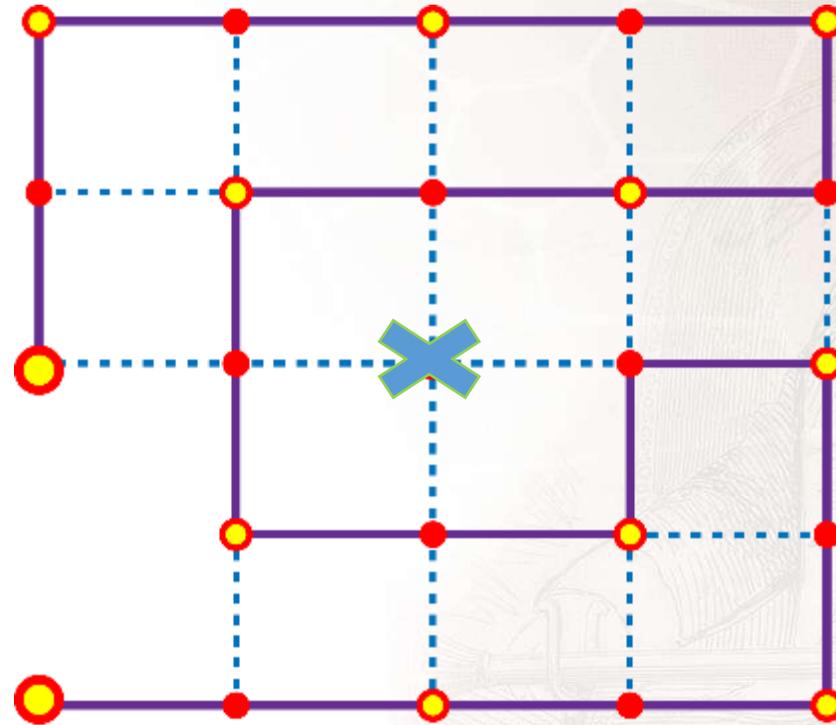


能否找到一筆畫路徑？

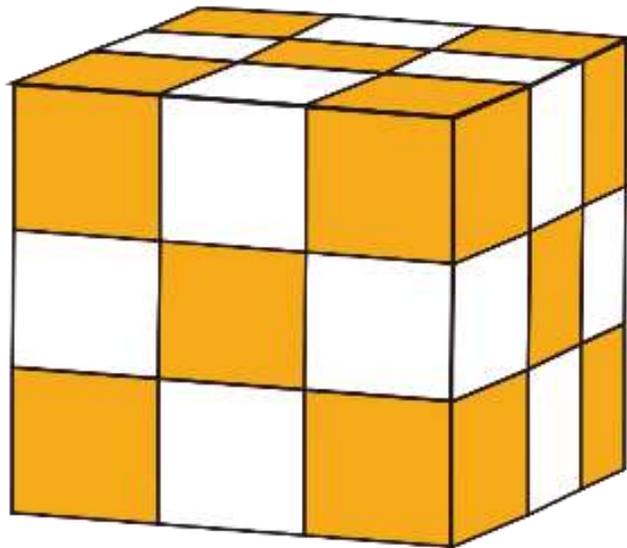


任意消去一個黃點，能否找到一筆畫路徑？

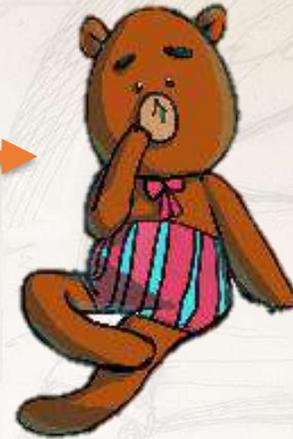
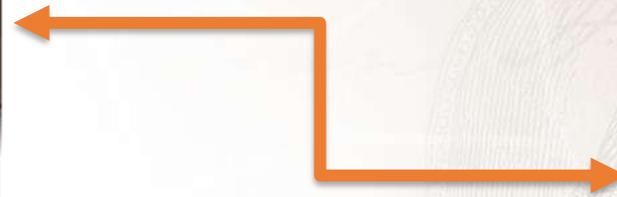
消掉任意一黃點都有一筆畫路徑！

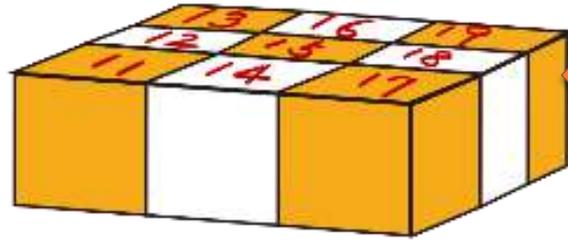


思考題 愛吃糖的古怪小熊



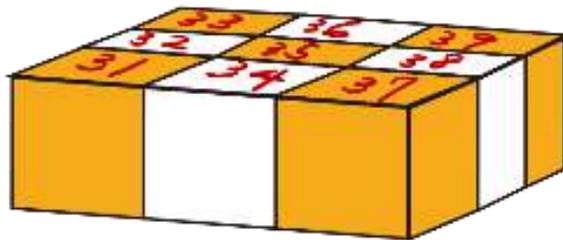
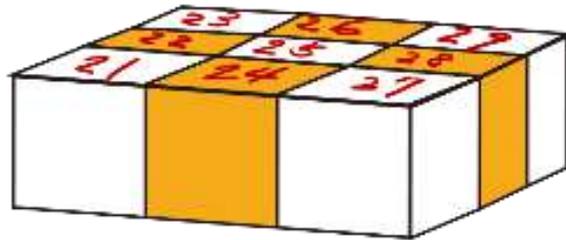
從這一顆開始吃





從這一顆開始吃

然後再吃旁邊（面接觸到的）那一顆，一顆一顆接著吃下去。小熊的吃法很浪費，只是把每顆方糖咬個大洞，不是整顆糖吃個精光，所以方糖不會垮下來。



假設牠希望在最後一天吃到最裡面的那一顆 (25)，請問牠辦得到嗎？

參考資料

- 「沒有數字的數學」徐力行教授 著。
- 「動物園裡的數學」徐力行教授 著。
- 「數學嘉年華」白啟光 著

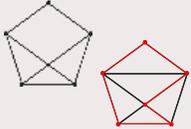
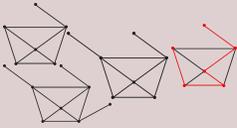
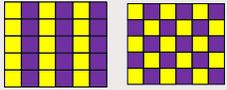
網址：

<http://serve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/carnival/bridge/index.htm>

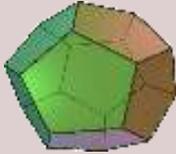
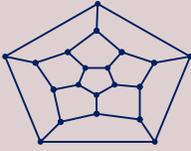
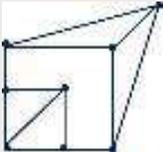
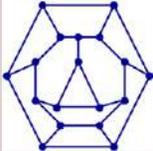
版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
1	2-5			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤
2	2、5			中國科技大學 徐惠莉
3	7			Sir William Rowan Hamilton, mid 19th century (person shown lived 1805–1865) Wikimedia Commons User Superborsuk https://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg 2018/6/12 visited This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET
4	8			Wikimedia Commons Collections search Wellcome Collection https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sir_William_Rowan_Hamilton._Etching_after_J._Kirkwood_after_Wellcome_V0002552.jpg 2018/6/12 visited This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET
5	8			William Rowan Hamilton – Irish mathematician and scientist irishpostalheritagepo https://irishpostalheritagepo.wordpress.com/2017/06/08/william-rowan-hamilton-irish-mathematician-and-scientist/ 2018/8/9 visited This work is used subject to the fair use doctrine of the Taiwan Copyright Act Article 46、52 and 65 by GET

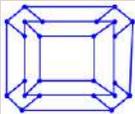
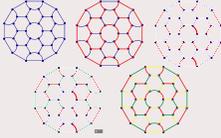
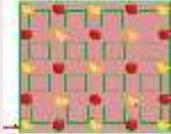
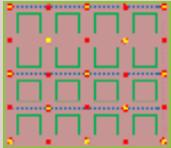
版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
6	9			Wikiquote JP, source: William Rowan Hamilton Plaque (C) JP :: Geograph Britain and Ireland https://en.wikiquote.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_Plaque_-_geograph.org.uk_-_347941.jpg 2018/6/12 visited
7	10-11			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤
8	12-13			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤
9	15-18			中國科技大學 徐惠莉
10	20-22			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤

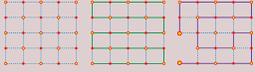
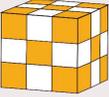
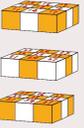
版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
11	24			Wikipedia created by en:User:Cyp https://zh.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.jpg 2018/6/12 visited
12	24			Wikimedia Commons cmglee, Arne Nordmann https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hamiltonian_path_3d.svg 2018/6/12 visited
13	25-27			第 2 章一筆畫遊歷問題，徐立行 著，沒有數字的數學，天下文化出版，38 頁本資料庫係根據中華民國著作權法第 46&52&65 條合理使用本作品。
14	30			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤
15	31			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
16	32			第 2 章一筆畫遊歷問題，徐立行 著，沒有數字的數學，天下文化出版，47 頁。 本資料庫係根據中華民國著作權法第 46&52&65 條合理使用本作品。
17	31-35			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤
18	36-39			中國科技大學 徐惠莉
19	37			中國科技大學 徐惠莉
20	38			中國科技大學 徐惠莉

版權聲明

序	頁	作品	版權標章	作者/來源
21	39-42			中國科技大學 徐惠莉
22	43			中國科技大學 徐惠莉
23	43, 44			中國科技大學 徐惠莉
24	44			中國科技大學 徐惠莉
25	2 36 37			中國科技大學 徐惠莉 羅心妤